Summer 2015

paratodo x: Una Introducción a la Lógica Formal

P.D. Magnus
University at Albany, State University of New York, pmagnus@albany.edu

paratodoχ

Una Introducción a la Lógica Formal

P.D. Magnus
Universidad de Albany, Universidad Estatal de Nueva York

Traducido por:

José Ángel Gascón
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

fecundity.com/logic, versión 1.30 [141227]

El autor desea dar las gracias a las personas que han hecho posible este proyecto. Entre ellas destacan Cristyn Magnus, que leyó muchos borradores iniciales; Aaron Schiller, que fue uno de los primeros que lo adoptaron y proporcionó considerables comentarios útiles, y Bin Kang, Craig Erb, Nathan Carter, Wes McMichael, Selva Samuel, Dave Krueger, Brandon Lee, Toan Tran, y los estudiantes de Introducción a la Lógica, que detectaron varios errores en versiones previas del libro.

Traducción al español: 2015 por José Ángel Gascón

La redacción ha sido llevada a cabo completamente en LaTeX2ε. El estilo de las pruebas de redacción está basado en fitch.sty (v.0.4) de Peter Selinger, Universidad de Ottawa.

Esta es una traducción al español de la versión 1.30 [141227] de forallx. La versión más reciente en inglés está disponible online en `http://www.fecundity.com/logic`

Índice general

Capítulo 1

¿Qué es la lógica?

La lógica es la actividad de evaluar argumentos, separando los buenos de los malos. Un argumento lógico está estructurado de forma que ofrece a alguien una razón para creer alguna conclusión. Por ejemplo:

(1) Está lloviendo mucho.
(2) Si no coges un paraguas, te vas a empapar.
$\therefore$ Deberías coger un paraguas.

Los tres puntos de la tercera línea del argumento significan 'Por lo tanto' e indican que el enunciado final es la *conclusión* del argumento. Los otros enunciados son *premisas* del argumento. Si crees las premisas, entonces el argumento te proporciona una razón para creer la conclusión.

Este capítulo explica varias nociones lógicas básicas que se aplican a los argumentos en un lenguaje natural como el español. Es importante comenzar con una comprensión clara de qué son los argumentos y qué significa que un argumento sea válido. Más adelante traduciremos los argumentos del español a un lenguaje formal. Nos interesa la validez formal, tal como se define en el lenguaje formal, para tener al menos algunas de las características importantes de la validez en lenguaje natural.

1.1. Argumentos

Cuando la gente intenta ofrecer argumentos, habitualmente usa palabras como 'por lo tanto' y 'porque'. Al analizar un argumento, lo primero que se debe hacer es separar las premisas de la conclusión. Palabras como esas dan una pista de cuál se supone que es el argumento, especialmente si —en el argumento como algo dado— la conclusión está al principio o en el medio del argumento.

indicadores de premisa: ya que, porque, dado que

indicadores de conclusión: por lo tanto, por consiguiente, por ello, entonces, así que

De un modo muy general, podemos definir un ARGUMENTO como una serie de enunciados. Los enunciados que están al principio de la serie son premisas. El último enunciado de la serie es la conclusión. Si las premisas son verdaderas y el argumento es bueno, entonces tienes una razón para aceptar la conclusión.

Ten en cuenta que esta definición es bastante general. Observa este ejemplo:

Hay café en la cafetera.
Hay un dragón tocando el fagot en el armario.
$\therefore$ Salvador Dalí era jugador de póquer.

Puede parecer raro llamar a esto un argumento, pero eso es porque sería un argumento horrible. Las dos premisas no tienen nada que ver con la conclusión. No obstante, dada nuestra definición, aun así cuenta como un argumento — aunque uno malo.

1.2. Enunciados

En lógica solo nos interesan los enunciados que pueden aparecer como una premisa o una conclusión en un argumento. Así que diremos que un ENUNCIADO es algo que puede ser verdadero o falso.

No debes confundir la idea de un enunciado que puede ser verdadero o falso con la diferencia entre hecho y opinión. A menudo, los enunciados en lógica expresan cosas que contarían como hechos —tales como 'Kierkegaard tenía chepa' o 'A Kierkegaard le gustaban las almendras'. Pero también pueden expresar cosas que se pueden considerar cuestiones de opinión —tales como 'Las almendras son deliciosas'.

Además, hay cosas que contarían como 'enunciados' en un curso de lingüística o gramática pero que no cuentan como enunciados en lógica.

Preguntas En una clase de gramática, '¿Ya tienes sueño?' contaría como un enunciado interrogativo. Aunque puede que tengas sueño o que estés despierto, la pregunta en sí misma no es ni verdadera ni falsa. Por esta razón, las preguntas no cuentan como enunciados en lógica. Supón que contestas a la pregunta: 'No tengo sueño.' Esto es verdadero o falso, así que es un enunciado en el sentido lógico. Generalmente, las *preguntas* no cuentan como enunciados, pero las *respuestas* sí.

'¿Sobre qué es este curso?' no es un enunciado. 'Nadie sabe sobre qué es este curso' es un enunciado.

Imperativos Las órdenes a menudo se formulan como imperativos tales como '¡Despierta!', 'Siéntate bien', y similares. En una clase de gramática, cuentan como enunciados imperativos. Aunque puede que sea bueno que te sientes bien o puede que no, la orden no es ni verdadera ni falsa. Date cuenta, sin embargo, de que las órdenes no siempre se formulan como imperativos. 'Vas a respetar mi autoridad' *es* verdadero o falso —o la respetarás o no— así que cuenta como un enunciado en el sentido lógico.

Exclamaciones A '¡Ay!' se le llama a veces enunciado exclamativo, pero no es ni verdadero ni falso. Trataremos '¡Ay, me he hecho daño en el dedo del pie!' como si significara lo mismo que 'Me he hecho daño en el pie'. El 'Ay' no añade nada que pueda ser verdadero o falso.

1.3. Dos formas en que los argumentos pueden fallar

Piensa en el argumento de que deberías coger un paraguas (en la p. 5). Si la premisa (1) es falsa —si es un día soleado— entonces el argumento no te da ninguna razón para llevar un paraguas. Incluso aunque esté lloviendo, puede que no necesites un paraguas. Puede que lleves puesto un poncho de lluvia o vayas por pasadizos cubiertos. En estos casos, la premisa (2) sería falsa, ya que podrías salir sin un paraguas y aún así evitar empaparte.

Supón por un momento que ambas premisas son verdaderas. No tienes un poncho de lluvia. Tienes que ir a lugares donde no hay pasadizos cubiertos. ¿Te muestra el argumento que deberías coger un paraguas? No necesariamente. Quizá disfrutes caminando bajo la lluvia y te gustaría empaparte. En tal caso, incluso aunque las premisas fueran verdaderas, la conclusión sería falsa.

Un argumento puede ser débil de dos formas. En primer lugar, una o más premisas puede ser falsa. Un argumento te da una razón para creer su conclusión solo si crees sus premisas. En segundo lugar, puede que las premisas no respalden la conclusión. Incluso si las premisas son verdaderas, el argumento puede ser débil. El ejemplo que acabamos de comentar es débil de ambas formas.

Cuando un argumento es débil de la segunda forma, hay algo incorrecto en la *forma lógica* del argumento. Premisas del tipo dado no conducen necesariamente a una conclusión del tipo dado. A nosotros nos interesa principalmente la forma lógica de los argumentos.

Veamos otro ejemplo:

Estás leyendo este libro.
Este es un libro de lógica.
$\therefore$ Eres estudiante de lógica.

Este argumento no es desastroso. La mayoría de las personas que leen este libro son estudiantes de lógica. Sin embargo, es posible que alguien que no sea estudiante de lógica lea este libro. Si tu compañero de piso cogiera el libro y lo hojease, no se convertiría inmediatamente en un estudiante de lógica. Así que las premisas de este argumento, aunque sean verdaderas, no garantizan la verdad de la conclusión. Su forma lógica no llega a ser perfecta.

Un argumento sin debilidades del segundo tipo tiene una forma lógica perfecta. Si sus premisas son verdaderas, entonces su conclusión es *necesariamente* verdadera. Llamamos a tal argumento 'deductivamente válido' o simplemente 'válido'.

Aunque podríamos considerar al argumento anterior como un buen argumento en algún sentido, no es válido; es decir, es 'inválido'. Una tarea importante de la lógica es separar los argumentos válidos de los argumentos inválidos.

1.4. Validez deductiva

Un argumento es deductivamente VÁLIDO si y solo si es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Lo crucial en un argumento válido es que es imposible que las premisas sean verdaderas y que *al mismo tiempo* la conclusión sea falsa. Observa este ejemplo:

Las naranjas son o bien frutas o bien instrumentos musicales.
Las naranjas no son frutas.
$\therefore$ Las naranjas son instrumentos musicales.

La conclusión de este argumento es ridícula. Sin embargo, se sigue con validez de las premisas. Este argumento es válido. *Si* ambas premisas fueran verdaderas, *entonces* la conclusión sería necesariamente verdadera.

Esto muestra que no se requiere que un argumento deductivamente válido tenga premisas verdaderas o una conclusión verdadera. Y a la inversa, tener premisas verdaderas y una conclusión verdadera no es suficiente para que un argumento sea válido. Observa este ejemplo:

Londres está en Inglaterra.
Beijing está en China.
∴ París está en Francia.

Las premisas y la conclusión de este argumento son de hecho verdaderas. No obstante, este argumento es terrible, porque las premisas no tienen nada que ver con la conclusión. Imagina lo que ocurriría si París se declarase independiente del resto de Francia. Entonces la conclusión sería falsa, aunque ambas premisas seguirían siendo verdaderas. Así que es *lógicamente posible* que las premisas de este argumento sean verdaderas y la conclusión falsa. El argumento es inválido.

Lo que es importante recordar es que la validez no tiene que ver con la verdad o la falsedad de los enunciados del argumento. Tiene que ver con la forma del argumento: que la verdad de las premisas sea incompatible con la falsedad de la conclusión.

Argumentos inductivos

Puede haber buenos argumentos que sin embargo no sean deductivamente válidos. Observa este:

En enero de 1997 llovió en San Diego.
En enero de 1998, llovió en San Diego.
En enero de 1999, llovió en San Diego.
∴ Cada enero llueve en San Diego.

Este es un argumento INDUCTIVO, porque a partir de muchos casos generaliza a una conclusión sobre todos los casos.

Ciertamente, el argumento podría ser más fuerte añadiendo más premisas: En enero de 2000, llovió en San Diego. En enero de 2001... y así sucesivamente. Sin embargo, independientemente de cuántas premisas añadamos, el argumento seguirá sin ser deductivamente válido. Es posible, aunque improbable, que no llueva el próximo enero en San Diego. Además, sabemos que el tiempo puede ser caprichoso. Ninguna cantidad de pruebas debería convencernos de que allí llueve *cada* enero. ¿Quién nos dice que algún año no será extraño y no habrá lluvia en enero en San Diego? Un único contraejemplo es suficiente para que la conclusión del argumento sea falsa.

Los argumentos inductivos, incluso los argumentos inductivos buenos, no son deductivamente válidos. En este libro no nos interesan los argumentos inductivos.

1.5. Otras nociones lógicas

Además de la validez deductiva, nos interesaremos por otros conceptos lógicos.

Valores de verdad

Verdadero o falso es lo que se conoce como VALOR DE VERDAD de un enunciado. Hemos definido los enunciados como cosas que pueden ser verdaderas o falsas; en lugar de ello podríamos haber dicho que los enunciados son cosas que pueden tener valores de verdad.

Verdad lógica

Al considerar formalmente los argumentos, nos preocupa lo que sería verdadero *si* las premisas fueran verdaderas. En general, no nos preocupa el valor de verdad real de unos enunciados en particular —si son *realmente* verdaderos o falsos. Sin embargo, hay algunos enunciados que deben ser verdaderos, simplemente por una cuestión de lógica.

Observa estos enunciados:

1. Está lloviendo.
2. Está lloviendo o no está lloviendo.
3. Está lloviendo y no está lloviendo.

Para poder saber si el enunciado 1 es verdadero, tendrías que mirar fuera o revisar el canal del tiempo. Lógicamente hablando, podría ser verdadero o falso. Los enunciados como este se llaman enunciados *contingentes*.

El enunciado 2 es diferente. No tienes que mirar fuera para saber que es verdadero. Sin importar cómo sea el tiempo, o está lloviendo o no. Este enunciado es *lógicamente verdadero*; es verdadero simplemente por una cuestión de lógica, independientemente de cómo sea realmente el mundo. A un enunciado lógicamente verdadero se le llama TAUTOLOGÍA.

Tampoco tienes que mirar cómo es el tiempo para decidir sobre el enunciado 3. Tiene que ser falso, simplemente por una cuestión de lógica. Podría estar lloviendo aquí y no estar lloviendo al otro lado de la ciudad, o podría estar lloviendo ahora pero dejar de llover incluso mientras lees esto, pero es imposible que esté lloviendo y no esté lloviendo aquí en este momento. El tercer enunciado es *lógicamente falso*; es falso independientemente de cómo sea el mundo. A un enunciado lógicamente falso se le llama CONTRADICCIÓN.

Para ser precisos, podemos definir un ENUNCIADO CONTINGENTE como un enunciado que no es ni una tautología ni una contradicción.

Un enunciado puede ser verdadero *siempre* y aún así ser contingente. Por ejemplo, si nunca hubiera habido un tiempo en que el universo contuviera menos de siete cosas, entonces el enunciado 'Existen al menos siete cosas' siempre sería verdadero. Sin embargo, el enunciado es contingente; su verdad no es una cuestión de lógica. No hay contradicción en pensar en un mundo posible en el que haya menos de siete cosas. La pregunta importante es si el enunciado *debe* ser verdadero, simplemente a causa de la lógica.

Equivalencia lógica

También podemos preguntarnos por las relaciones lógicas *entre* dos enunciados. Por ejemplo:

> John fue a la tienda después de lavar los platos.
> John lavó los platos antes de ir a la tienda.

Estos dos enunciados son ambos contingentes, ya que John puede que no haya ido a la tienda o lavado los platos en absoluto. Sin embargo, deben tener el mismo valor de verdad. Si cualquiera de los dos enunciados es verdadero, entonces ambos lo son; si cualquiera de los dos enunciados es falso, entonces ambos lo son. Cuando dos enunciados tienen necesariamente el mismo valor de verdad, decimos que son LÓGICAMENTE EQUIVALENTES.

Consistencia

Observa estos dos enunciados:

B1 Mi único hermano es más alto que yo.

B2 Mi único hermano es más bajo que yo.

La lógica sola no nos puede decir cuál de estos dos enunciados es verdadero, si alguno lo es. Sin embargo podemos decir que *si* el primer enunciado (B1) es verdadero, *entonces* el segundo enunciado (B2) debe ser falso. Y si B2 es verdadero, entonces B1 debe ser falso. No puede darse el caso de que ambos enunciados sean verdaderos.

Si todos los enunciados de un conjunto no pueden ser verdaderos al mismo tiempo, como B1–B2, se dice que son INCONSISTENTES. En caso contrario, son CONSISTENTES.

Podemos preguntarnos por la consistencia de cualquier número de enunciados. Por ejemplo, mira la siguiente lista de enunciados:

G1 Hay al menos cuatro jirafas en el parque natural.
G2 Hay exactamente siete gorilas en el parque natural.
G3 No hay más de dos marcianos en el parque natural.
G4 Cada jirafa en el parque natural es un marciano.

G1 y G4 conjuntamente implican que hay al menos cuatro jirafas marcianas en el parque. Esto entra en conflicto con G3, que implica que no hay más de dos jirafas marcianas allí. Así que el conjunto de enunciados G1–G4 es inconsistente. Date cuenta de que la inconsistencia no tiene absolutamente nada que ver con G2. G2 simplemente es parte de un conjunto inconsistente.

A veces se dice que un conjunto inconsistente de enunciados 'contiene una contradicción'. Con esto se quiere decir que es lógicamente imposible que todos los enunciados sean verdaderos a la vez. Un conjunto puede ser inconsistente incluso aunque cada uno de los enunciados en él sean o bien contingentes o tautológicos. Cuando un solo enunciado es una contradicción, entonces ese único enunciado no puede ser verdadero.

1.6. Lenguajes formales

Este es un famoso argumento válido:

Sócrates es un hombre.
Todos los hombres son mortales.
∴ Sócrates es mortal.

Este es un argumento sólido como el hierro. La única manera de poner en cuestión la conclusión es negar una de las premisas —la forma lógica es impecable. ¿Y el siguiente argumento?

Sócrates es un hombre.
Todos los hombres son zanahorias.
$\therefore$ Sócrates es una zanahoria.

Puede que este argumento sea menos interesante que el primero, puesto que la segunda premisa es evidentemente falsa. No hay ningún sentido claro en que todos los hombres sean zanahorias. No obstante, el argumento es válido. Para ver esto, fíjate en que ambos argumentos tienen esta forma:

S es M.
Todos los M son C.
$\therefore$ S es C.

En ambos argumentos S es Sócrates y M es hombre. En el primer argumento, C es mortal; en el segundo, C es zanahoria. Ambos argumentos tienen esta forma, y todo argumento con esta forma es válido. Así que ambos argumentos son válidos.

Lo que hemos hecho aquí es sustituir palabras como 'hombre' o 'zanahoria' con símbolos como 'M' o 'C' para hacer explícita la forma lógica. Esta es la idea central detrás de la lógica formal. Lo que queremos es quitar aquellos aspectos del argumento que sean irrelevantes o que nos distraigan para que la forma lógica sea más perspicua.

Partiendo de un argumento en un *lenguaje natural* como el español, traducimos el argumento a un *lenguaje formal*. Se sustituyen partes de los enunciados en español por letras y símbolos. La meta es revelar la estructura formal del argumento, como hemos hecho con los dos anteriores.

Hay lenguajes formales que funcionan como la simbolización que hemos dado para esos dos argumentos. Una lógica como esa fue elaborada por Aristóteles, un filósofo que vivió en Grecia durante el siglo IV a.C. Aristóteles fue estudiante de Platón y tutor de Alejandro Magno. La lógica de Aristóteles, con algunas revisiones, fue la lógica dominante en el mundo occidental durante más de dos milenios.

En la lógica aristotélica, las categorías se sustituyen por letras mayúsculas. Así, cada enunciado de un argumento se representa con una de cuatro formas, que los lógicos medievales etiquetaron de esta manera: (A) Todos los A son B. (E) Ningún A es B. (I) Algún A es B. (O) Algún A no es B.

Así es posible describir los *silogismos* válidos, argumentos de tres líneas como los dos que hemos comentado antes. Los lógicos medievales dieron nombres mnemotécnicos a todas las formas de argumentos válidos. La forma de nuestros dos argumentos, por ejemplo, se llamaba *Barbara*. Las vocales del nombre, todas A, representan el hecho de que las dos premisas y la conclusión son todas enunciados de la forma (A).

La lógica aristotélica tiene muchas limitaciones. Una de ellas es que no hace ninguna distinción entre tipos e individuos. Así que la primera premisa también podría escribirse 'Todos los S son M': todos los Sócrates son hombres. A pesar de su importancia histórica, la lógica aristotélica ha sido reemplazada. El resto de este libro desarrollará dos lenguajes formales.

El primero es LE, que significa *lógica de enunciados*. En la LE, las unidades más pequeñas son los propios enunciados. Los enunciados simples se representan con letras y se conectan con conectivas lógicas como 'y' y 'no' para construir enunciados más complejos.

El segundo es LC, que significa *lógica cuantificacional*. En la LC, las unidades básicas son objetos, propiedades de objetos y relaciones entre objetos.

Cuando traducimos un argumento a un lenguaje formal, esperamos hacer más clara su estructura lógica. Queremos incluir lo suficiente de la estructura del argumento en español para poder juzgar si el argumento es válido o inválido. Si incluyéramos cada una de las características de la lengua española, toda su sutileza y sus matices, entonces traducir a un lenguaje formal no tendría ninguna ventaja. Podríamos simplemente pensar en el argumento en español.

Al mismo tiempo, queremos un lenguaje formal que nos permita representar muchos tipos de argumentos que se dan en la lengua española. Esa es una razón para preferir la LC en lugar de la lógica aristotélica; la LC puede representar todos los argumentos válidos de la lógica aristotélica y más.

Así que, al decidirse por un lenguaje formal, hay una inevitable tensión entre el deseo de capturar la mayor parte posible de la estructura y el deseo de tener un lenguaje formal simple —los lenguajes formales simples dejan fuera más cosas. Esto significa que no hay un lenguaje formal perfecto. Unos harán un mejor trabajo que otros traduciendo determinados argumentos de la lengua española.

En este libro asumimos que *verdadero* y *falso* son los únicos valores de verdad posibles. Los lenguajes lógicos que hacen esta asunción se llaman *bivalentes*, que significa *de dos valores*. La lógica aristotélica, la LE y la LC son todas bivalentes, pero la capacidad de la lógica bivalente tiene sus límites. Por ejemplo, algunos filósofos han afirmado que el futuro aún no está determinado. Si están en lo cierto, entonces los enunciados sobre *lo que será el caso* aún no son verdaderos o falsos. Algunos lenguajes formales integran esto teniendo en cuenta a los enunciados que no son ni verdaderos ni falsos, sino algo entre medias. Otros lenguajes formales, llamados lógicas paraconsistentes, permiten enunciados que son *tanto* verdaderos *como* falsos.

Los lenguajes que se presentan en este libro no son los únicos lenguajes formales posibles. No obstante, la mayoría de las lógicas no estándar amplían la estructura formal básica de las lógicas bivalentes que se comentan en este libro. Así que este es un buen lugar para empezar.

Resumen de nociones lógicas

- Un argumento es (deductivamente) VÁLIDO si es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa; en caso contrario es INVÁLIDO.
- Una TAUTOLOGÍA es un enunciado que debe ser verdadero por una cuestión de lógica.
- Una CONTRADICCIÓN es un enunciado que debe ser falso por una cuestión de lógica.
- Un ENUNCIADO CONTINGENTE no es ni una tautología ni una contradicción.
- Don enunciados son LÓGICAMENTE EQUIVALENTES si tienen necesariamente el mismo valor de verdad.
- Un conjunto de enunciados es CONSISTENTE si es lógicamente posible que todos los miembros del conjunto sean verdaderos al mismo tiempo; en caso contrario es INCONSISTENTE.

Ejercicios

Al final de cada capítulo encontrarás una serie de problemas prácticos que revisan y exploran la materia tratada en el capítulo. No hay nada que sustituya el trabajo real con algunos problemas, ya que la lógica es más una forma de pensar que una memorización de datos. Las respuestas a algunos de los problemas se proporcionan al final del libro en el apéndice B; los problemas resueltos en el apéndice están marcados con un $\star$.

Parte A ¿Cuáles de los siguientes son 'enunciados' en el sentido lógico?

1. Inglaterra es más pequeño que China.
2. Groenlandia está al sur de Jerusalén.
3. ¿Está Nueva Jersey al este de Wisconsin?
4. El número atómico del helio es 2.
5. El número atómico del helio es π.
6. Odio los fideos demasiado cocidos.

7. ¡Puaj! ¡Fideos demasiado cocidos!
8. Los fideos demasiado cocidos son asquerosos.
9. Tómate tu tiempo.
10. Esta es la última pregunta.

Parte B Para cada uno de los siguientes: ¿es una tautología, una contradicción o un enunciado contingente?

1. César cruzó el Rubicón.
2. Una vez alguien cruzó el Rubicón.
3. Nunca nadie ha cruzado el Rubicón.
4. Si César cruzó el Rubicón, entonces alguien lo ha hecho.
5. Aunque César cruzó el Rubicón, nadie ha cruzado nunca el Rubicón.
6. Si alguien ha cruzado alguna vez el Rubicón, fue César.

⋆ **Parte C** Mira de nuevo los enunciados G1–G4 en la p. 12, y piensa en cada uno de los siguientes conjuntos de enunciados. ¿Cuáles son consistentes? ¿Cuáles son inconsistentes?

1. G2, G3 y G4
2. G1, G3 y G4
3. G1, G2 y G4
4. G1, G2 y G3

⋆ **Parte D** ¿Cuáles de los siguientes son posibles? Si es posible, da un ejemplo. Si no es posible, explica por qué.

1. Un argumento válido que tiene una premisa falsa y una premisa verdadera.
2. Un argumento válido que tiene una conclusión falsa.
3. Un argumento válido cuya conclusión es una contradicción.
4. Un argumento inválido cuya conclusión es una tautología.
5. Una tautología que es contingente.
6. Dos enunciados lógicamente equivalentes, que ambos son tautologías.
7. Dos enunciados lógicamente equivalentes, uno de los cuales es una tautología y el otro es contingente.
8. Dos enunciados lógicamente equivalentes que juntos forman un conjunto inconsistente.
9. Un conjunto consistente de enunciados que contiene una contradicción.
10. Un conjunto inconsistente de enunciados que contiene una tautología.

Capítulo 2

Lógica de enunciados

Este capítulo presenta un lenguaje lógico llamado LE. Es una versión de la *lógica de enunciados*, porque las unidades básicas del lenguaje representan enunciados completos.

2.1. Letras de enunciados

En la LE se usan letras mayúsculas para representar enunciados básicos. Considerada únicamente como un símbolo de la LE, la letra A podría significar cualquier enunciado. Así que, al traducir de español a LE, es importante proporcionar una *clave de simbolización*. Esta clave proporciona un enunciado en español para cada letra de enunciado que se usa en la simbolización.

Por ejemplo, mira este argumento:

Hay una manzana sobre el escritorio.
Si hay una manzana sobre el escritorio, entonces Jenny ha venido a clase.
$\therefore$ Jenny ha venido a clase.

Este es obviamente un argumento válido en español. Al simbolizarlo, queremos preservar la estructura del argumento que hace que sea válido. ¿Qué ocurre si sustituimos cada enunciado por una letra? Nuestra clave de simbolización sería así:

A: Hay una manzana sobre el escritorio.
B: Si hay una manzana sobre el escritorio, entonces Jenny ha venido a clase.

C: Jenny ha venido a clase.

Entonces simbolizaríamos el argumento de esta forma:

$$\begin{array}{rl} & A \\ & B \\ \therefore & C \end{array}$$

No hay ninguna conexión necesaria entre un enunciado A, que podría ser cualquier enunciado, y otros enunciados B y C, que podrían ser cualesquiera enunciados. La estructura del argumento se ha perdido completamente en esta traducción.

Lo importante del argumento es que la segunda premisa no es meramente *cualquier* enunciado, lógicamente independiente de los otros enunciados del argumento. La segunda premisa contiene la primera premisa y la conclusión *como partes*. Nuestra clave de simbolización para el argumento solo tiene que incluir significados para A y C, y podemos construir la segunda premisa con esas piezas. Así que simbolizamos el argumento de esta forma:

$$\begin{array}{rl} & A \\ & \text{Si } A\text{, entonces } C. \\ \therefore & C \end{array}$$

Esto preserva la estructura del argumento que hace que sea válido, pero todavía hace uso de la expresión española 'Si... entonces...'. Aunque lo que buscamos en última instancia es sustituir todas las expresiones españolas por notación lógica, este es un buen comienzo.

Los enunciados que pueden simbolizarse con letras de enunciado se llaman *enunciados atómicos*, porque son las piezas básicas a partir de las cuales se pueden construir enunciados más complejos. Cualquier estructura lógica que tenga un enunciado se pierde al traducirlo como enunciado atómico. Desde el punto de vista de la LE, el enunciado es solo una letra. Se puede usar para construir enunciados más complejos, pero no se puede desmontar.

Solo hay veintisiete letras en el alfabeto, pero no hay un límite lógico del número de enunciados atómicos. Podemos usar la misma letra para simbolizar diferentes enunciados atómicos añadiendo un subíndice, un pequeño número escrito tras la letra. Podríamos hacer una clave de simbolización que fuera así:

$\mathbf{A_1}$**:** La manzana está bajo el armario.
$\mathbf{A_2}$**:** Los argumentos en la LE siempre contienen enunciados atómicos.
$\mathbf{A_3}$**:** Adam Ant está tomando un avión de Anchorage a Albany.

⋮

A_{294}: La aliteración enfada a los normalmente afables astronautas.

Recuerda que cada una de esas letras de enunciado es diferente. Cuando hay subíndices en la clave de simbolización, es importante tenerlos controlados.

2.2. Conectivas

Las conectivas lógicas se usan para construir enunciados complejos con componentes atómicos. Hay cinco conectivas lógicas en la LE. Esta tabla las resume, y más abajo se explican.

símbolo	cómo se llama	qué significa
$\neg$	negación	'No se da el caso de que…'
&	conjunción	'… y …'
$\vee$	disyunción	'… o …'
$\rightarrow$	condicional	'Si … entonces …'
$\leftrightarrow$	bicondicional	'… si y solo si …'

Negación

Piensa cómo podríamos simbolizar estos enunciados:

1. Mary está en Barcelona.
2. Mary no está en Barcelona.
3. Mary está en algún lugar diferente de Barcelona.

Para simbolizar el enunciado 1 necesitamos una letra de enunciado. Podemos proporcionar una clave de simbolización:

B: Mary está en Barcelona.

Date cuenta de que aquí estamos dando a B una interpretación diferente de la que le dimos en la sección anterior. La clave de simbolización solo especifica lo que B significa *en un contexto específico*. Es vital que sigamos usando este significado de B mientras estemos hablando sobre Mary y Barcelona. Más tarde, cuando estemos simbolizando diferentes enunciados, podemos escribir una nueva clave de simbolización y usar B para que signifique otra cosa.

El enunciado 1 es simplemente B.

Puesto que el enunciado 2 está obviamente relacionado con el enunciado 1, no nos interesa introducir una letra de enunciado diferente. Poniéndolo parcialmente en español, el enunciado significa 'No B'. Para simbolizar eso necesitamos un símbolo para la negación lógica. Utilizaremos '$\neg$'. Ahora podemos traducir 'No B' como $\neg B$.

El enunciado 3 habla sobre si Mary está en Barcelona o no, pero no contiene la palabra 'no'. Sin embargo, es evidente que es lógicamente equivalente al enunciado 2. Ambos significan: no se da el caso de que Mary esté en Barcelona. Por lo tanto, podemos traducir tanto el enunciado 2 como el enunciado 3 como $\neg B$.

> Un enunciado puede simbolizarse como $\neg\mathcal{A}$ si puede parafrasearse en español como 'No se da el caso de que $\mathcal{A}$'.

Piensa en estos otros ejemplos:

4. El aparato puede reemplazarse si se rompe.
5. El aparato es irreemplazable.
6. El aparato no es irreemplazable.

Si hacemos que R signifique 'El aparato es reemplazable', entonces el enunciado 4 puede traducirse como R.

¿Qué hacemos con el enunciado 5? Decir que el aparato es irreemplazable significa que no se da el caso de que el aparato sea reemplazable. Así que, aunque el enunciado 5 no sea negativo en español, lo simbolizamos usando la negación como $\neg R$.

El enunciado 6 puede parafrasearse como 'No se da el caso de que el aparato sea irreemplazable'. Usando la negación dos veces, traducimos esto como $\neg\neg R$. Cada una de las dos negaciones seguidas funciona como una negación, así que el enunciado significa 'No se da el caso de que... no se da el caso de que... R'. Si piensas en el enunciado en español, es lógicamente equivalente al enunciado 4. Así que, al definir la equivalencia lógica en la LE, nos aseguraremos de que R y $\neg\neg R$ son lógicamente equivalentes.

Más ejemplos:

7. Elliott es feliz.
8. Elliott es infeliz.

Si hacemos que H signifique 'Elliott es feliz', entonces podemos simbolizar el enunciado 7 como H.

Sin embargo, sería un error simbolizar el enunciado 8 como $\neg H$. Es cierto que, si Elliot es infeliz, entonces no es feliz —pero el enunciado 8 no significa lo mismo que 'No se da el caso de que Elliot sea feliz'. Podría ser que no fuese feliz pero que tampoco fuese infeliz. Tal vez se encuentre en algún lugar entre medias. Para permitir la posibilidad de que Elliott sea indiferente, necesitamos una nueva letra de enunciado para simbolizar el enunciado 8.

Para cualquier enunciado $\mathcal{A}$: si $\mathcal{A}$ es verdadero, entonces $\neg\mathcal{A}$ es falso. Si $\neg\mathcal{A}$ es verdadero, entonces $\mathcal{A}$ es falso. Usando 'V' para verdadero y 'F' para falso, podemos resumir esto en una *tabla de verdad característica* para la negación:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

Hablaremos de las tablas de verdad en más detalle en el próximo capítulo.

Conjunción

Observa estos enunciados:

9. Adam es atlético.
10. Bárbara es atlética.
11. Adam es atlético y Bárbara también es atlética.

Necesitaremos diferentes letras de enunciado para 9 y 10, así que definimos esta clave de simbolización.

A: Adam es atlético.
B: Bárbara es atlética.

El enunciado 9 puede simbolizarse como A.

El enunciado 10 puede simbolizarse como B.

El enunciado 11 puede parafrasearse como 'A y B'. Para simbolizar completamente este enunciado, necesitamos otro símbolo. Utilizaremos '$\&$'. Así que traducimos 'A y B' como $A \& B$. La conectiva lógica '$\&$' se llama CONJUNCIÓN, y tanto A como B se denominan TÉRMINOS DE LA CONJUNCIÓN.

Fíjate en que no hemos intentado simbolizar 'también' en el enunciado 11. Palabras como 'ambos' y 'también' sirven para llamar nuestra atención al hecho de que se están combinando dos cosas. No realizan más trabajo lógico, así que no necesitamos representarlas en la LE.

Algunos ejemplos más:

12. Bárbara es atlética y enérgica.
13. Bárbara y Adam son ambos atléticos.
14. Aunque Bárbara es enérgica, ella no es atlética.
15. Bárbara es atlética, pero Adam es más atlético que ella.

El enunciado 12 es obviamente una conjunción. Ese enunciado dice dos cosas sobre Bárbara, así que en español está permitido referirse a Bárbara solo una vez. Puede ser tentador intentar hacer eso al traducir el argumento: dado que B significa 'Bárbara es atlética', uno podría parafrasear los enunciados como 'B y enérgica'. Esto sería un error. Una vez que traducimos parte de un enunciado como B, cualquier estructura que haya más allá se pierde. B es un enunciado atómico; no es más que verdadero o falso. Por su parte, 'enérgica' no es un enunciado; en sí mismo no es ni verdadero ni falso. En lugar de ello, deberíamos parafrasear el enunciado como 'B y Bárbara es enérgica'. Ahora necesitamos añadir una letra de enunciado a la clave de simbolización. Hagamos que E signifique 'Bárbara es enérgica'. Ahora el enunciado puede traducirse como $B \,\&\, E$.

Un enunciado puede simbolizarse como $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$ si puede parafrasearse en español como '$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$'. Cada uno de los términos de la conjunción debe ser un enunciado.

El enunciado 13 dice una cosa sobre dos sujetos diferentes. Dice tanto de Bárbara como de Adam que son atléticos, y en español usamos la palabra 'atléticos' solo una vez. Al traducirlo a LE, es importante darse cuenta de que el enunciado puede ser parafraseado como 'Bárbara es atlética y Adam es atlético'. Esto se traduce como $B \,\&\, A$.

El enunciado 14 es un poco más complicado. La palabra 'aunque' establece un contraste entre la primera parte del enunciado y la segunda parte. Sin embargo, lo que el enunciado dice es que Bárbara es enérgica y que ella no es atlética. Para que cada uno de los términos de la conjunción sea un enunciado atómico, tenemos que reemplazar 'ella' por 'Bárbara'.

Así que podemos parafrasear el enunciado 14 como 'Bárbara es enérgica *y* Bárbara no es atlética'. El segundo término contiene una negación, así que lo volvemos a parafrasear: 'Bárbara es enérgica *y no se da el caso de que* Bárbara sea atlética'. Esto se traduce como $E \,\&\, \neg B$.

El enunciado 15 contiene una estructura de contraste similar. Esto es irrelevante para el propósito de traducirlo a LE, así que podemos parafrasear el enunciado como 'Bárbara es atlética *y* Adam es más atlético que Bárbara'. (Fíjate en que de nuevo sustituimos el pronombre 'ella' por su nombre.) ¿Cómo deberíamos traducir el segundo término de la conjunción? Ya tenemos la letra de enunciado A, que es sobre el hecho de que Adam es atlético, y la letra B, que es sobre el hecho de que Bárbara es atlética, pero ninguna es sobre el hecho de que uno de ellos es más atlético que el otro. Necesitamos una nueva letra de enunciado. Hagamos que R signifique 'Adam es más atlético que Bárbara'. Ahora el enunciado se traduce como $B \& R$.

> Los enunciados que se pueden parafrasear como '$\mathcal{A}$ pero $\mathcal{B}$' o 'Aunque $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$' se simbolizan mejor con la conjunción: $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$

Es importante recordar que las letras de enunciado A, B y R son enunciados atómicos. Consideradas como símbolos de la LE, no tienen ningún significado aparte de ser verdaderas o falsas. Las hemos usado para simbolizar diferentes enunciados de la lengua española que hablan sobre personas que son atléticas, pero esta similitud se pierde completamente cuando los traducimos a LE. Ningún lenguaje formal puede capturar toda la estructura de la lengua española, pero mientras esa estructura no sea importante para el argumento no se pierde nada por dejarla fuera.

Para cualquier enunciado $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ es verdadero si y solo si tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ son verdaderos. Podemos resumir esto en la tabla de verdad característica para la conjunción:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \& \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción es *simétrica* porque podemos intercambiar los términos de la conjunción sin cambiar el valor de verdad del enunciado. Independientemente de qué sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{B} \& \mathcal{A}$.

Disyunción

Observa estos enunciados:

16. Denison jugará al golf conmigo o verá películas.
17. Denison o Ellery jugará al golf conmigo.

Para estos enunciados podemos usar esta clave de simbolización:

D: Denison jugará al golf conmigo.
E: Ellery jugará al golf conmigo.
M: Denison verá películas.

El enunciado 16 es 'D o M'. Para simbolizar esto completamente, introducimos un nuevo símbolo. El enunciado se convierte en $D \vee M$. La conectiva '$\vee$' se llama DISYUNCIÓN, y tanto D como M se llaman TÉRMINOS DE LA DISYUNCIÓN.

El enunciado 17 es solo ligeramente más complicado. Hay dos sujetos, pero el enunciado en español solo da el verbo una vez. Al traducirlo, podemos parafrasearlo como 'Denison jugará al golf conmigo o Ellery jugará al golf conmigo'. Ahora es evidente que se traduce como $D \vee E$.

> Un enunciado puede simbolizarse como $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ si puede parafrasearse en español como '$\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$'. Cada uno de los términos de la disyunción debe ser un enunciado.

A veces en español la palabra 'o' excluye la posibilidad de que ambos términos de la disyunción sean verdaderos. Esto se denomina O EXCLUSIVA. Una *o exclusiva* es claramente lo que se pretende cuando el menú de un restaurante dice 'Los entrantes vienen con sopa o ensalada'. Puedes pedir sopa; puedes pedir ensalada; pero, si quieres *tanto* sopa *como* ensalada, entonces tienes que pagar más.

En otras ocasiones, la palabra 'o' permite la posibilidad de que ambos términos de la disyunción puedan ser verdaderos. Probablemente este es el caso con el enunciado 17. Puede que juegue con Denison, con Ellery, o tanto con Denison como con Ellery. El enunciado 17 simplemente dice que jugaré con *al menos* uno de ellos. Esto se denomina O INCLUSIVA.

El símbolo '$\vee$' representa una *o inclusiva*. Así que $D \vee E$ es verdadero si D es verdadero, si E es verdadero, o si tanto D como E son verdaderos. Solo es falso si tanto D como E son falsos. Podemos resumir esto con la tabla de verdad característica para la disyunción:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como la conjunción, la disyunción es simétrica. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{B} \vee \mathcal{A}$.

Estos enunciados son algo más complicados:

18. No pedirás sopa o no pedirás ensalada.
19. No pedirás ni sopa ni ensalada.
20. Te dan sopa o ensalada, pero no ambas.

Hacemos que S_1 signifique que te dan sopa y que S_2 signifique que te dan ensalada.

El enunciado 18 puede ser parafraseado de esta forma: 'O bien *no se da el caso de que* te den sopa o *no se da el caso de que* te den ensalada'. Traducir esto requiere el uso tanto de la disyunción como de la negación. Se convierte en $\neg S_1 \vee \neg S_2$.

El enunciado 19 también requiere la negación. Puede parafrasearse como '*no se da el caso de que* te den sopa o te den ensalada'. Necesitamos alguna forma de indicar que la negación no solo niega el término de la derecha o el de la izquierda, sino que niega toda la disyunción. Para hacer esto, ponemos paréntesis alrededor de la disyunción: 'No se da el caso de que $(S_1 \vee S_2)$'. Esto se convierte simplemente en $\neg(S_1 \vee S_2)$.

Observa que los paréntesis hacen un trabajo importante aquí. El enunciado $\neg S_1 \vee S_2$ significaría 'O bien no te darán sopa o te darán ensalada'.

El enunciado 20 es un *o exclusivo*. Podemos dividir el enunciado en dos partes. La primera parte dice que te dan o una u otra. Traducimos esto como $(S_1 \vee S_2)$. La segunda parte dice que no te dan las dos. Podemos parafrasear eso como 'No se da el caso de que te den sopa y te den ensalada'. Utilizando tanto la negación como la conjunción, traducimos esto como $\neg(S_1 \,\&\, S_2)$. Ahora solo tenemos que juntar las dos partes. Como hemos visto antes, 'pero' normalmente puede ser traducido como una conjunción. Así que el enunciado 20 puede ser traducido como $(S_1 \vee S_2) \,\&\, \neg(S_1 \,\&\, S_2)$.

Aunque '$\vee$' es un *o inclusivo*, se puede simbolizar un *o exclusivo* en LE. Simplemente se necesita más de una conectiva para hacerlo.

Condicional

Para los siguientes enunciados, hagamos que R signifique 'Cortarás el cable rojo' y que B signifique 'La bomba explotará'.

21. Si cortas el cable rojo, entonces la bomba explotará.
22. La bomba explotará solo si cortas el cable rojo.

El enunciado 21 puede traducirse parcialmente como 'Si R, entonces B'. Utilizaremos el símbolo '$\rightarrow$' para representar la implicación lógica. El enunciado se convierte en $R \rightarrow B$. La conectiva se llama CONDICIONAL. El enunciado del lado izquierdo del condicional (R en este ejemplo) se llama ANTECEDENTE. El enunciado del lado derecho (B) se llama CONSECUENTE.

El enunciado 22 también es un condicional. Dado que la palabra 'si' aparece en la segunda mitad del enunciado, puede ser tentador simbolizarlo de la misma forma que el enunciado 21. Eso sería un error.

El condicional $R \rightarrow B$ dice que *si* R fuera verdadero, *entonces* B también sería verdadero. No dice que la *única* forma de que la bomba pueda explotar sea que cortes el cable rojo. Otra persona podría cortar el cable, o la bomba podría tener un temporizador. El enunciado $R \rightarrow B$ no dice nada sobre qué podemos esperar si R es falso. El enunciado 22 es diferente. Dice que las únicas condiciones bajo las cuales la bomba explotará incluyen que cortes el cable rojo; es decir, si la bomba explota, entonces tienes que haber cortado el cable. Por lo tanto, el enunciado 22 debe simbolizarse como $B \rightarrow R$.

Es importante recordar que la conectiva '$\rightarrow$' solo dice que, si el antecedente es verdadero, entonces el consecuente es verdadero. No dice nada sobre la conexión *causal* entre los dos sucesos. Traducir el enunciado 22 como $B \rightarrow R$ no significa que la explosión de la bomba habría causado de alguna forma que cortes el cable. Tanto el enunciado 21 como el 22 sugieren que, si cortas el cable rojo, el hecho de que cortes el cable rojo sería la causa de la explosión de la bomba. Se diferencian en la conexión *lógica*. Si el enunciado 22 fuera verdadero, entonces una explosión nos diría —a quienes estamos lejos y a salvo de la bomba— que has cortado el cable rojo. Sin una explosión, el enunciado 22 no nos dice nada.

> El enunciado parafraseado '$\mathcal{A}$ solo si $\mathcal{B}$' es lógicamente equivalente a 'Si $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}$'.

'Si $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B}$' significa que si $\mathcal{A}$ es verdadero entonces $\mathcal{B}$ también lo es. Así que sabemos que si el antecedente $\mathcal{A}$ es verdadero pero el consecuente $\mathcal{B}$ es falso, entonces el condicional 'Si $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B}$' es falso. ¿Cuál es el valor de verdad de 'Si $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B}$' en otras circunstancias? Supón, por ejemplo, que el antecedente $\mathcal{A}$ resulta ser falso. Entonces 'Si $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B}$' no nos diría nada sobre el valor de verdad real del consecuente $\mathcal{B}$, y no está claro cuál sería el valor de verdad de 'Si $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B}$'.

En español, la verdad de los condicionales a menudo depende de cuál *sería* el caso si el antecedente *fuese verdadero* —aunque, de hecho, el antecedente sea falso. Esto plantea un problema para traducir los condicionales a LE. Considerados como enunciados de la LE, R y B en los ejemplos anteriores no tienen intrínsecamente nada que ver entre ellos. Para considerar cómo sería el mundo si R fuera verdadero, tendríamos que analizar lo que R dice sobre el mundo. Sin embargo, dado que R es un símbolo atómico de la LE, no hay más estructura que analizar. Cuando sustituimos un enunciado por una letra de enunciado, lo consideramos meramente como un enunciado atómico que puede ser verdadero o falso.

Para traducir condicionales a LE, no intentaremos capturar todas las sutilezas que 'Si...entonces...' tiene en español. En lugar de ello, el símbolo '$\rightarrow$' será un *condicional material*. Esto significa que, cuando $\mathcal{A}$ es falso, el condicional $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ es automáticamente verdadero, independientemente del valor de verdad de $\mathcal{B}$. Si tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ son verdaderos, entonces el condicional $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ es verdadero.

En resumen, $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ es falso si y solo si $\mathcal{A}$ es verdadero y $\mathcal{B}$ es falso. Podemos resumir esto con la tabla de verdad característica para el condicional.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El condicional es *asimétrico*. No se pueden intercambiar el antecedente y el consecuente sin cambiar el significado del enunciado, porque $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A}$ no son lógicamente equivalentes.

No todos los enunciados de la forma 'Si...entonces...' son condicionales. Observa este enunciado:

23. Si alguien quiere verme, estaré en el porche.

Si digo esto, significa que estaré en el porche, independientemente de si alguien quiere verme o no —pero si alguien quisiera verme, entonces debería buscarme ahí. Si hacemos que P signifique 'Estaré en el porche', entonces el enunciado 23 puede traducirse simplemente como P.

Bicondicional

Observa estos enunciados:

24. La figura de la pizarra es un triángulo solo si tiene exactamente tres lados.
25. La figura de la pizarra es un triángulo si tiene exactamente tres lados.

26. La figura de la pizarra es un triángulo si y solo si tiene exactamente tres lados.

Hagamos que T signifique 'La figura es un triángulo' y que S signifique 'La figura tiene tres lados'.

El enunciado 24, por las razones comentadas anteriormente, puede traducirse como $T \to S$.

El enunciado 25 es diferente en un sentido importante. Puede parafrasearse como 'Si la figura tiene tres lados, entonces es un triángulo'. Así que puede traducirse como $S \to T$.

El enunciado 26 dice que T es verdadero *si y solo si* S es verdadero; podemos inferir S de T y podemos inferir T de S. Esto se llama BICONDICIONAL porque implica los dos condicionales $S \to T$ y $T \to S$. Usaremos '$\leftrightarrow$' para representar el bicondicional; el enunciado 26 puede traducirse como $S \leftrightarrow T$.

Podríamos haber prescindido de un nuevo símbolo para el bicondicional. Dado que el enunciado 26 significa '$T \to S$ y $S \to T$', podríamos traducirlo como $(T \to S) \,\&\, (S \to T)$. Necesitaríamos paréntesis para indicar que $(T \to S)$ y $(S \to T)$ son términos separados; la expresión $T \to S \,\&\, S \to T$ sería ambigua.

Dado que siempre podríamos escribir $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ en lugar de $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, estrictamente hablando no *necesitamos* introducir un nuevo símbolo para el bicondicional. No obstante, los lenguajes lógicos habitualmente tienen tal símbolo. La LE tendrá uno, lo que hará más fácil traducir expresiones como 'si y solo si'.

$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ es verdadero si y solo si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen el mismo valor de verdad. Esta es la tabla de verdad característica para el bicondicional:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.3. Otra simbolización

Ya hemos presentado todas las conectivas de la LE. Podemos usarlas conjuntamente para traducir muchos tipos de enunciados. Piensa en estos ejemplos de enunciados que usan la conectiva 'a menos que' de la lengua española:

27. A menos que lleves una chaqueta, cogerás un resfriado.
28. Cogerás un resfriado a menos que lleves una chaqueta.

Hagamos que J signifique 'Llevarás una chaqueta' y que D signifique 'Cogerás un resfriado'.

Podemos parafrasear el enunciado 27 como 'A menos que J, D'. Esto significa que, si no llevas una chaqueta, cogerás un resfriado; con esto en mente, podemos traducirlo como $\neg J \rightarrow D$. También significa que, si no coges un refriado, entonces debes haber llevado una chaqueta; con esto en mente, podemos traducirlo como $\neg D \rightarrow J$.

¿Cuál de ellas es la traducción correcta del enunciado 27? Ambas traducciones son correctas, porque las dos traducciones son lógicamente equivalentes en la LE.

El enunciado 28, en español, es lógicamente equivalente al enunciado 27. Puede traducirse o bien como $\neg J \rightarrow D$ o como $\neg D \rightarrow J$.

Al simbolizar enunciados como el enunciado 27 y el enunciado 28, es fácil confundirse. Dado que el condicional no es simétrico, sería un error traducir cualquiera de esos enunciados como $J \rightarrow \neg D$. Afortunadamente, hay otras expresiones lógicamente equivalentes. Ambos enunciados significan que llevarás una chaqueta o —si no llevas una chaqueta— entonces cogerás un resfriado. Así que podemos traducirlos como $J \vee D$. (Puede que te preocupe que el 'o' aquí debería ser un 'o exclusivo'. Sin embargo, estos enunciados no excluyen la posibilidad de que puedas *tanto* llevar una chaqueta *como* coger un resfriado; las chaquetas no te protegen de todas las formas posibles de coger un resfriado.)

Si un enunciado puede parafrasearse como 'A menos que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$', entonces puede simbolizarse como $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

La simbolización de los tipos estándar de enunciados se resume en la p. 163.

2.4. Enunciados en LE

El enunciado 'Las manzanas son rojas o las moras son azules' es un enunciado en español, y el enunciado '$(A \vee B)$' es un enunciado en la LE. Aunque podemos identificar enunciados en español cuando nos los encontramos, no tenemos una definición formal de 'enunciado en español'. En la LE es posible definir formalmente qué cuenta como un enunciado. Este es un aspecto en el que un lenguaje formal como la LE es más preciso que un lenguaje natural como el español.

Es importante distinguir entre el lenguaje lógico de la LE, que estamos desarrollando, y el lenguaje que usamos para hablar sobre la LE. Cuando hablamos sobre un lenguaje, el lenguaje sobre el que hablamos se llama LENGUAJE OBJETO. El lenguaje que usamos para hablar sobre el lenguaje objeto se llama METALENGUAJE.

El lenguaje objeto en este capítulo es la LE. El metalenguaje es el español —no el español conversacional, sino el español complementado con algo de vocabulario lógico y matemático. El enunciado '$(A \vee B)$' es un enunciado del lenguaje objeto porque utiliza solo símbolos de la LE. Sin embargo, la palabra 'enunciado' no es en sí misma parte de la LE, así que el enunciado 'Esta expresión es un enunciado de la LE' no es un enunciado de la LE. Es un enunciado del metalenguaje, un enunciado que usamos para hablar *sobre* la LE.

En esta sección daremos una definición formal de 'enunciado de la LE'. La definición misma se dará en español matemático, el metalenguaje.

Expresiones

Hay tres tipos de símbolos en la LE:

letras de enunciado con subíndices, según necesidad	$A, B, C, \ldots, Z$ $A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$
conectivas	$\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
paréntesis	(,)

Definimos EXPRESIÓN DE LA LE como cualquier cadena de símbolos de la LE. Toma cualesquiera símbolos de la LE y escríbelos, en cualquier orden, y ya tienes una expresión.

Fórmulas bien formadas

Dado que cualquier secuencia de símbolos es una expresión, muchas expresiones de la LE serán sinsentidos. A una expresión con significado se la llama *fórmula bien formada*. Es común usar el acrónimo *fbf*; el plural es fbfs.

Obviamente, las letras de enunciado individuales como A y G_{13} serán fbfs. Podemos formar más fbfs a partir de ellas usando las diferentes conectivas. Usando la negación, tenemos $\neg A$ y $\neg G_{13}$. Usando la conjunción, tenemos $A \& G_{13}$, $G_{13} \& A$, $A \& A$ y $G_{13} \& G_{13}$. También podemos aplicar la negación repetidas veces para obtener fbfs como $\neg\neg A$ o aplicar la negación junto con la conjunción para obtener fbfs como $\neg(A \& G_{13})$ y $\neg(G_{13} \& \neg G_{13})$. Las combinaciones posibles son ilimitadas, incluso a partir de solo estas dos letras de enunciado, y hay infinitas letras de enunciado. Así que no tiene sentido enumerar todas las fbfs.

En lugar de ello, describiremos el proceso por medio del cual se pueden construir fbfs. Piensa en la negación: dada cualquier fbf $\mathcal{A}$ de la LE, $\neg\mathcal{A}$ es una fbf de la LE. Aquí es importante darse cuenta de que $\mathcal{A}$ no es la letra de enunciado A. Se trata más bien de una variable que representa cualquier fbf. Fíjate en que esta variable $\mathcal{A}$ no es un símbolo de la LE, así que $\neg\mathcal{A}$ no es una expresión de la LE. Es una expresión del metalenguaje que nos permite hablar sobre infinitas expresiones de la LE: todas las expresiones que empiezan con el símbolo de negación. Dado que $\mathcal{A}$ es parte del metalenguaje, se llama *metavariable*.

Podemos decir algo similar para cada una de las otras conectivas. Por ejemplo, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs de la LE, entonces $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$ es una fbf de la LE. Proporcionando cláusulas como estas para todas las conectivas, llegamos a la siguiente definición formal de fórmula bien formada de la LE:

1. Todo enunciado atómico es una fbf.
2. Si $\mathcal{A}$ es una fbf, entonces $\neg\mathcal{A}$ es una fbf de la LE.
3. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$ es una fbf.
4. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ es una fbf.
5. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ es una fbf.
6. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una fbf.
7. Todas las fbfs y solo ellas pueden ser generadas por aplicaciones de estas reglas.

Date cuenta de que no podemos aplicar inmediatamente esta definición para ver si una expresión arbitraria es una fbf. Supón que queremos saber si $\neg\neg\neg D$ es una fbf de la LE. Mirando la segunda cláusula de la definición, sabemos que $\neg\neg\neg D$ es una fbf *si* $\neg\neg D$ es una fbf. Así que tenemos que preguntarnos si $\neg\neg D$ es una fbf o no. De nuevo, mirando la segunda cláusula de la definición, $\neg\neg D$ es una fbf *si* $\neg D$ lo es. De nuevo, $\neg D$ es una fbf *si* D es una fbf. Pero D es una letra de enunciado, un enunciado atómico de la LE, así que sabemos que D es una fbf por la primera cláusula de la definición. Así que, para una fórmula compuesta como $\neg\neg\neg D$, debemos aplicar la definición repetidas veces. Al final llegamos a los enunciados atómicos a partir de los cuales se construye la fbf.

Las definiciones como esta se llaman *recursivas*. Las definiciones recursivas comienzan con unos elementos básicos especificables y definen formas de componer indefinidamente los elementos básicos. De la misma manera que la definición recursiva permite construir enunciados complejos a partir de partes simples, puedes usarla para descomponer enunciados en sus partes más simples. Para determinar si algo cumple la definición o no, puede que tengas que regresar a la definición muchas veces.

La conectiva en la que nos fijamos en primer lugar para descomponer un enunciado se llama OPERADOR LÓGICO PRINCIPAL de ese enunciado. Por ejemplo: el operador lógico principal de $\neg(E \vee (F \rightarrow G))$ es la negación, $\neg$. El operador lógico principal de $(\neg E \vee (F \rightarrow G))$ es la disyunción, $\vee$.

Enunciados

Recuerda que un enunciado es una expresión con significado que puede ser verdadera o falsa. Dado que las expresiones con significado de la LE son las fbfs y dado que toda fbf de la LE es verdadera o falsa, la definición de un enunciado en la LE es la misma que la definición de una fbf. No todos los lenguajes formales tienen esta interesante característica. En el lenguaje de la LC, que se explica más adelante en el libro, hay fbfs que no son enunciados.

La estructura recursiva de los enunciados en la LE será importante cuando consideremos las circunstancias bajo las cuales un enunciado concreto sería verdadero o falso. El enunciado $\neg\neg\neg D$ es verdadero si y solo si el enunciado $\neg\neg D$ es falso, y así sucesivamente a través de la estructura del enunciado hasta que lleguemos a los componentes atómicos. $\neg\neg\neg D$ es verdadero si y solo si el enunciado atómico D es falso. Volveremos a este punto en el próximo capítulo.

Convenciones de notación

Una fbf como $(Q \,\&\, R)$ debe estar encerrada entre paréntesis, porque podríamos aplicar la definición otra vez para usarla como parte de un enunciado más complejo. Si negamos $(Q \,\&\, R)$, obtenemos $\neg(Q \,\&\, R)$. Si simplemente tuviéramos $Q \,\&\, R$, sin los paréntesis, y pusiéramos una negación delante de ella, obtendríamos $\neg Q \,\&\, R$. Lo más natural es leer esto de manera que significa lo mismo que $(\neg Q \,\&\, R)$, algo muy diferente de $\neg(Q \,\&\, R)$. El enunciado $\neg(Q \,\&\, R)$ significa que no se da el caso de que tanto Q como R sean verdaderos; Q puede ser falso o R puede ser falso, pero el enunciado no nos dice cuál. El enunciado $(\neg Q \,\&\, R)$ significa específicamente que Q es falso y que R es verdadero. Por tanto, los paréntesis son cruciales para el significado del enunciado.

Así que, estrictamente hablando, $Q \,\&\, R$ sin paréntesis *no* es un enunciado de la LE. No obstante, al usar la LE, a menudo podremos relajar la definición precisa para ponernos las cosas más fáciles. Haremos esto de varias formas.

En primer lugar, entendemos que $Q \,\&\, R$ significa lo mismo que $(Q \,\&\, R)$. A modo de convención, podemos omitir los paréntesis que aparecen *alrededor de todo el enunciado.*

En segundo lugar, a veces puede resultar confuso mirar enunciados largos con muchos pares anidados de paréntesis. Adoptamos la convención de usar los corchetes '[' y ']' en lugar de los paréntesis. No hay una diferencia lógica entre $(P \vee Q)$ y $[P \vee Q]$, por ejemplo. El enunciado tan poco manejable

$$(((H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)) \,\&\, (J \vee K))$$

puede escribirse de esta forma:

$$\big[(H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)\big] \,\&\, (J \vee K)$$

En tercer lugar, a veces querremos traducir la conjunción de tres o más enunciados. Para el enunciado 'Alice, Bob y Candice fueron a la fiesta', supón que hacemos que A signifique 'Alice fue', que B signifique 'Bob fue', y que C signifique 'Candice fue'. La definición solo nos permite formar una conjunción a partir de dos enunciados, así que podemos traducirlo como $(A \,\&\, B) \,\&\, C$ o como $A \,\&\, (B \,\&\, C)$. No hay razón para distinguir entre ellas, ya que las dos traducciones son lógicamente equivalentes. No hay diferencia lógica entre la primera, en la que $(A \,\&\, B)$ se combina con C, y la segunda, en la que A se combina con $(B \,\&\, C)$. Así que igualmente podríamos escribir $A \,\&\, B \,\&\, C$. A modo de convención, podemos omitir los paréntesis al combinar tres o más enunciados.

En cuarto lugar, surge una situación similar con las disyunciones múltiples. 'O Alice o Bob o Candice fue a la fiesta' puede traducirse como $(A \vee B) \vee C$ o como $A \vee (B \vee C)$. Dado que estas dos traducciones son lógicamente equivalentes, podemos escribir $A \vee B \vee C$.

Estas últimas dos convenciones solo se aplican a las conjunciones múltiples o a las disyunciones múltiples. Si una serie de conectivas incluye tanto disyunciones como conjunciones, entonces los paréntesis son esenciales; como con $(A \,\&\, B) \vee C$ y $A \,\&\, (B \vee C)$. También se requieren los paréntesis si hay una serie de condicionales o bicondicionales; como con $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ y $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$.

Hemos adoptado estas cuatro reglas como *convenciones de notación*, no como cambios en la definición de enunciado. Estrictamente hablando, $A \vee B \vee C$ sigue sin ser un enunciado. Es más bien una especie de abreviatura. Lo escribimos por comodidad, pero lo que en realidad queremos decir es el enunciado $(A \vee (B \vee C))$.

Si hubiéramos dado una definición diferente de fbf, entonces las fórmulas anteriores podrían contar como fbfs. Podríamos haber escrito la regla 3 de esta manera: "Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... $\mathcal{Z}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{Z})$ es una fbf." Esto haría que fuera más fácil traducir algunos enunciados en español, pero tendría el coste de hacer que nuestro lenguaje formal fuese más complicado. Tendríamos que recordar la compleja definición cuando desarrollásemos tablas de verdad y un sistema de demostración. Queremos un lenguaje lógico que sea *expresivamente simple* y nos permita traducir fácilmente del español, pero también queremos un lenguaje *formalmente simple*. La adopción de convenciones de notación es un término medio entre esos dos deseos.

Ejercicios

$\star$ **Parte A** Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado en español a la LE.

M: Esas criaturas son hombres con trajes.
C: Esas criaturas son chimpancés.
G: Esas criaturas son gorilas.

1. Esas criaturas no son hombres con trajes.
2. Esas criaturas son hombres con trajes o no lo son.
3. Esas criaturas son o gorilas o chimpancés.
4. Esas criaturas no son ni gorilas ni chimpancés.
5. Si esas criaturas son chimpancés, entonces no son ni gorilas ni hombres con trajes.
6. A menos que esas criaturas sean hombres con trajes, o son chimpancés o son gorilas.

Parte B Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado en español a la LE.

A: Mister Ace ha sido asesinado.
B: Ha sido el mayordomo.
C: Ha sido el cocinero.
D: La duquesa está mintiendo.
E: Mister Edge ha sido asesinado.
F: El arma homicida es una sartén.

1. O Mister Ace o Mister Edge ha sido asesinado.
2. Si Mister Ace ha sido asesinado, entonces ha sido el cocinero.
3. Si Mister Edge ha sido asesinado, entonces no ha sido el cocinero.
4. O ha sido el mayordomo o la duquesa está mintiendo.
5. Ha sido el cocinero solo si la duquesa está mintiendo.
6. Si el arma homicida es una sartén, entonces el culpable debe haber sido el cocinero.
7. Si el arma homicida no es una sartén, entonces el culpable ha sido o el cocinero o el mayordomo.

8. Mister Ace ha sido asesinado si y solo si Mister Edge no ha sido asesinado.
9. La duquesa está mintiendo, a menos que sea Mister Edge quien ha sido asesinado.
10. Si Mister Ace ha sido asesinado, ha sido con una sartén.
11. Dado que ha sido el cocinero, no ha sido el mayordomo.
12. ¡Pues claro que la duquesa está mintiendo!

⋆ **Parte C** Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado en español a la LE.

$\mathbf{E}_1$: Ava es electricista.
$\mathbf{E}_2$: Harrison es electricista.
$\mathbf{F}_1$: Ava es bombera.
$\mathbf{F}_2$: Harrison es bombero.
$\mathbf{S}_1$: Ava está satisfecha con su carrera.
$\mathbf{S}_2$: Harrison está satisfecho con su carrera.

1. Ava y Harrison son ambos electricistas.
2. Si Ava es bombera, entonces está satisfecha con su carrera.
3. Ava es bombera, a menos que sea electricista.
4. Harrison es un electricista insatisfecho.
5. Ni Ava ni Harrison son electricistas.
6. Tanto Ava como Harrison son electricistas, pero a ninguno de ellos le parece satisfactorio.
7. Harrison está satisfecho solo si es bombero.
8. Si Ava no es electricista, entonces Harrison tampoco lo es, pero si ella lo es, entonces él también.
9. Ava está satisfecha con su carrera si y solo si Harrison no está satisfecho con la suya.
10. Si Harrison es tanto electricista como bombero, entonces debe estar satisfecho con su trabajo.
11. No puede ser que Harrison sea tanto electricista como bombero.
12. Harrison y Ava son ambos bomberos si y solo si ninguno de ellos es electricista.

⋆ **Parte D** Proporciona una clave de simbolización y simboliza los siguientes enunciados en LE.

1. Alice y Bob son ambos espías.
2. Si o Alice o Bob es un espía, entonces el código ha sido descifrado.
3. Si ni Alice ni Bob son espías, entonces el código sigue siendo secreto.
4. Habrá un revuelo en la embajada alemana, a menos que alguien haya descifrado el código.

5. O bien el código ha sido descifrado o no lo ha sido, pero habrá un revuelo en la embajada alemana de todas formas.
6. O Alice o Bob es un espía, pero no ambos.

Parte E Proporciona una clave de simbolización y simboliza los siguientes enunciados en LE.

1. Si Gregor juega en la primera base, entonces el equipo perderá.
2. El equipo perderá a menos que ocurra un milagro.
3. El equipo perderá o no, pero Gregor jugará en la primera base de todas formas.
4. La madre de Gregor hará galletas si y solo si Gregor juega en la primera base.
5. Si ocurre un milagro, entonces la madre de Gregor no hará galletas.

Parte F Para cada argumento, escribe una clave de simbolización y traduce el argumento de la mejor forma posible a la LE.

1. Si Dorothy toca el piano por la mañana, entonces Roger se despierta malhumorado. Dorothy toca el piano por la mañana a menos que esté distraída. Así que, si Roger no se despierta malhumorado, entonces Dorothy debe estar distraída.
2. O lloverá o nevará el martes. Si llueve, Neville estará triste. Si nieva, Neville tendrá frío. Por lo tanto, Neville estará triste o tendrá frío el martes.
3. Si Zoog recuerda hacer sus tareas, entonces las cosas están limpias pero no ordenadas. Si se le olvida, entonces las cosas están ordenadas pero no limpias. Por lo tanto, o las cosas están ordenadas o están limpias —pero no ambas.

$\star$ **Parte G** Para cada uno de los siguientes: (a) ¿Es una fbf de la LE? (b) ¿Es un enunciado de la LE, teniendo en cuenta las convenciones de notación?

1. (A)
2. $J_{374} \vee \neg J_{374}$
3. $\neg\neg\neg\neg F$
4. $\neg \,\&\, S$
5. $(G \,\&\, \neg G)$
6. $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$
7. $(A \rightarrow (A \,\&\, \neg F)) \vee (D \leftrightarrow E)$
8. $[(Z \leftrightarrow S) \rightarrow W] \,\&\, [J \vee X]$
9. $(F \leftrightarrow \neg D \rightarrow J) \vee (C \,\&\, D)$

Parte H

1. ¿Hay alguna fbf de la LE que no contenga ninguna letra de enunciado? ¿Por qué, o por qué no?
2. En este capítulo hemos simbolizado el *o exclusivo* usando $\vee$, & y $\neg$. ¿Cómo traducirías un *o exclusivo* usando solo dos conectivas? ¿Hay alguna manera de traducir un *o exclusivo* usando solo una conectiva?

Capítulo 3

Tablas de verdad

Este capítulo presenta una forma de evaluar enunciados y argumentos de la LE. Aunque puede ser laborioso, el método de la tabla de verdad es un procedimiento puramente mecánico que no requiere ninguna intuición ni perspicacia especial.

3.1. Conectivas veritativo-funcionales

Todo enunciado no atómico de la LE se compone de enunciados atómicos con conectivas de enunciados. El valor de verdad del enunciado compuesto solo depende del valor de verdad de los enunciados atómicos que lo conforman. Para conocer el valor de verdad de $(D \leftrightarrow E)$, por ejemplo, solo necesitas conocer el valor de verdad de D y el valor de verdad de E. Las conectivas que funcionan de esta manera se llaman VERITATIVO-FUNCIONALES.

En este capítulo nos serviremos del hecho de que todos los operadores lógicos en LE son veritativo-funcionales —lo que hace posible construir tablas de verdad para determinar las características lógicas de los enunciados. No obstante, debes tener en cuenta que esto no es posible en todos los lenguajes. En español es posible formar un nuevo enunciado a partir de cualquier enunciado más simple $\mathcal{X}$ diciendo 'Es posible que $\mathcal{X}$'. El valor de verdad de este nuevo enunciado no depende directamente del valor de verdad de $\mathcal{X}$. Incluso si $\mathcal{X}$ es falso, quizá en algún sentido $\mathcal{X}$ *podría* haber sido verdadero —y entonces el nuevo enunciado sería verdadero. Algunos lenguajes formales, llamados *lógicas modales*, tienen un operador para la posibilidad. En una lógica modal podríamos traducir 'Es posible que $\mathcal{X}$' como $\diamond\mathcal{X}$. Sin embargo, la capacidad de traducir enunciados como este tiene un coste. El operador $\diamond$ no es veritativo-funcional, así que las lógicas modales no son aptas para las tablas de verdad.

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
1	0
0	1

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tabla 3.1: Las tablas de verdad características para las conectivas de la LE.

3.2. Hacer tablas de verdad

El valor de verdad de los enunciados que solo contienen una conectiva se da en la tabla de verdad característica de esa conectiva. En el capítulo anterior hicimos las tablas de verdad características con 'V' para verdadero y 'F' para falso. Sin embargo, es importante señalar que aquí no se trata de la verdad en ningún sentido profundo o cósmico. Los poetas y los filósofos pueden discutir por extenso sobre la naturaleza y el significado de *la verdad*, pero las funciones de verdad en LE son simplemente reglas que transforman valores de entrada en valores de salida. Para subrayar esto, en este capítulo escribiremos '1' y '0' en lugar de 'V' y 'F'. Aunque interpretamos que '1' significa 'verdadero' y '0' significa 'falso', se pueden programar ordenadores para que rellenen tablas de verdad de manera puramente mecánica. En una máquina, '1' puede significar que un registro está encendido y '0' que el registro está apagado. Matemáticamente, simplemente son los dos valores posibles que un enunciado de la LE puede tener. Las tablas de verdad de las conectivas de la LE, escritas con unos y ceros, se proporcionan en la tabla 3.1.

La tabla de verdad característica para la conjunción, por ejemplo, proporciona las condiciones de verdad de cualquier enunciado de la forma $(\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B})$. Aunque los términos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean enunciados largos y complicados, la conjunción es verdadera si y solo si tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ son verdaderos. Piensa en el enunciado $(H\,\&\,I) \rightarrow H$. Pensamos en todas las combinaciones posibles de verdadero y falso para H y I, lo que nos da cuatro filas. Después copiamos los valores de verdad de las letras de enunciado y los escribimos debajo de las letras del enunciado.

H	I	$(H$	$\&$	$I)$	$\rightarrow$	H
1	1	**1**		**1**		**1**
1	0	**1**		**0**		**1**
0	1	**0**		**1**		**0**
0	0	**0**		**0**		**0**

Ahora piensa en el subenunciado $H\,\&\,I$. Esto es una conjunción $\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B}$ con H como $\mathcal{A}$ y con I como $\mathcal{B}$. H e I son ambos verdaderos en la primera fila. Dado que una conjunción es verdadera cuando ambos términos son verdaderos, escribimos un 1 debajo del símbolo de la conjunción. Continuamos con las otras tres filas y obtenemos esto:

H	I	$(H$	$\&$	$I)$	$\to$	H
		$\mathcal{A}$	$\&$	$\mathcal{B}$		
1	1	1	**1**	1		1
1	0	1	**0**	0		1
0	1	0	**0**	1		0
0	0	0	**0**	0		0

El enunciado completo es un condicional $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ con $(H \& I)$ como $\mathcal{A}$ y con H como $\mathcal{B}$. En la segunda fila, por ejemplo, $(H \& I)$ es falso y H es verdadero. Dado que un condicional es verdadero cuando el antecedente es falso, escribimos un 1 en la segunda fila bajo el símbolo del condicional. Continuamos con las otras tres filas y obtenemos esto:

H	I	$(H$	$\&$	$I)$	$\to$	H
			$\mathcal{A}$		$\to$	$\mathcal{B}$
1	1		1		**1**	1
1	0		0		**1**	1
0	1		0		**1**	0
0	0		0		**1**	0

La columna de los unos bajo el condicional nos dice que el enunciado $(H \& I) \to I$ es verdadero independientemente de los valores de verdad de H e I. Pueden ser verdaderos o falsos en cualquier combinación, y aun así el enunciado compuesto resulta ser verdadero. El hecho de que hemos considerado todas las combinaciones posibles es crucial. Si solo tuviéramos una tabla de verdad con dos filas, no podríamos estar seguros de que el enunciado no es falso con alguna otra combinación de valores de verdad.

En este ejemplo no hemos repetido todas las entradas de cada una de las tablas. Sin embargo, en la realidad, al hacer las tablas de verdad en un papel, es poco práctico borrar columnas enteras o rehacer toda la tabla con cada paso. Aunque esté más llena, la tabla de verdad se puede hacer de esta forma:

H	I	$(H$	$\&$	$I)$	$\to$	H
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0

La mayoría de las columnas bajo el enunciado solo están ahí con el propósito de llevar la cuenta. Cuando estés más habituado a las tablas de verdad, probablemente ya no necesitarás copiar las columnas de cada una de las letras de enunciado. En cualquier caso, el valor de verdad del enunciado en cada fila es solo la columna que está bajo el operador lógico principal del enunciado; en este caso, la columna debajo del condicional.

Una TABLA DE VERDAD COMPLETA tiene una fila para todas las combinaciones posibles de 1 y 0 para todas las letras de enunciado. El tamaño de la tabla de verdad completa depende del número de letras de enunciado diferentes de la tabla. Un enunciado que solo contenga una letra de enunciado solo necesita dos filas, como en la tabla de verdad característica para la negación. Esto es cierto incluso aunque la misma letra se repita muchas veces, como en el enunciado $[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \,\&\, \neg(C \rightarrow C)$. La tabla de verdad completa solo requiere dos líneas porque solo hay dos posibilidades: C puede ser verdadero o puede ser falso. Una única letra de enunciado nunca puede marcarse tanto con 1 como con 0 en la misma fila. La tabla de verdad para este enunciado es así:

C	$[(C$	$\leftrightarrow$	$C)$	$\rightarrow$	$C]$	$\&$	$\neg$	$(C$	$\rightarrow$	$C)$
1	1	1	1	1	1	**0**	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	**0**	0	0	1	0

Al mirar la columna debajo de la conectiva principal, vemos que el enunciado es falso en ambas filas de la tabla; es decir, es falso independientemente de si C es verdadero o falso.

Un enunciado que contiene dos letras de enunciado precisa de cuatro líneas en la tabla de verdad completa, como en las tablas de verdad características y la tabla para $(H \,\&\, I) \rightarrow I$.

Un enunciado que contiene tres letras de enunciado requiere ocho líneas. Por ejemplo:

M	N	P	M	$\&$	$(N$	$\vee$	$P)$
1	1	1	1	**1**	1	1	1
1	1	0	1	**1**	1	1	0
1	0	1	1	**1**	0	1	1
1	0	0	1	**0**	0	0	0
0	1	1	0	**0**	1	1	1
0	1	0	0	**0**	1	1	0
0	0	1	0	**0**	0	1	1
0	0	0	0	**0**	0	0	0

Por esta tabla sabemos que el enunciado $M \,\&\, (N \vee P)$ puede ser verdadero o falso, dependiendo de los valores de verdad de M, N y P.

Una tabla de verdad completa para un enunciado que contiene cuatro letras de enunciado diferentes requiere 16 líneas. Cinco letras, 32 líneas. Seis letras, 64 líneas. Y así sucesivamente. Para ser completamente general: si una tabla de verdad completa tiene n letras de enunciado diferentes, entonces debe tener 2^n filas.

Para rellenar las columnas de una tabla de verdad completa, empieza con la letra de enunciado que esté más a la derecha y alterna unos y ceros. En la siguiente columna por la izquierda, escribe dos unos, luego dos ceros, y repítelo. Para la tercera letra de enunciado, escribe cuatro unos seguidos de cuatro ceros. Así obtenemos una tabla de verdad de ocho líneas como la anterior. Para hacer una tabla de verdad de 16 líneas, la siguiente columna de letras de enunciado debe tener ocho unos seguidos de ocho ceros. Para hacer una tabla de 32 líneas, la siguiente columna tendría 16 unos seguidos de 16 ceros. Y así sucesivamente.

3.3. Usar tablas de verdad

Tautologías, contradicciones y enunciados contingentes

Recuerda que un enunciado en español es una tautología si debe ser verdadero por una cuestión de lógica. Con una tabla de verdad completa, tenemos en cuenta todas las formas como podría ser el mundo. Si el enunciado es verdadero en cada una de las líneas de una tabla de verdad completa, entonces es verdadero por una cuestión de lógica, independientemente de cómo sea el mundo.

Así que un enunciado es una TAUTOLOGÍA EN LE si la columna debajo de su conectiva principal es 1 en cada una de las líneas de una tabla de verdad completa.

Asimismo, un enunciado es una CONTRADICCIÓN EN LE si la columna debajo de su conectiva principal es 0 en cada una de las líneas de una tabla de verdad completa.

Un enunciado es CONTINGENTE EN LE si no es ni una tautología ni una contracción; es decir, si es 1 en al menos una fila y 0 en al menos una fila.

Por las tablas de verdad de la sección anterior, sabemos que $(H \,\&\, I) \rightarrow H$ es una tautología, que $[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \,\&\, \neg(C \rightarrow C)$ es una contradicción, y que $M \,\&\, (N \vee P)$ es contingente.

Equivalencia lógica

Dos enunciados son lógicamente equivalentes en español si tienen el mismo valor de verdad por una cuestión de lógica. De nuevo, las tablas de verdad nos permiten definir un concepto análogo para la LE: dos enunciados son LÓGICAMENTE EQUIVALENTES EN LE si tienen el mismo valor de verdad en cada una de las filas de una tabla de verdad completa.

Piensa en los enunciados $\neg(A \vee B)$ y $\neg A \,\&\, \neg B$. ¿Son lógicamente equivalentes? Para averiguarlo, construimos una tabla de verdad.

A	B	$\neg\,(A \vee B)$	$\neg\,A\;\&\;\neg\,B$
1	1	**0** 1 1 1	0 1 **0** 0 1
1	0	**0** 1 1 0	0 1 **0** 1 0
0	1	**0** 0 1 1	1 0 **0** 0 1
0	0	**1** 0 0 0	1 0 **1** 1 0

Mira las columnas de las conectivas principales; la negación en el primer enunciado, la conjunción en el segundo. En las primeras tres filas, ambas son 0. En la última fila, ambas son 1. Dado que coinciden en cada fila, los dos enunciados son lógicamente equivalentes.

Consistencia

Un conjunto de enunciados en español es consistente si es lógicamente posible que todos sean verdaderos a la vez. Un conjunto de enunciados es LÓGICAMENTE CONSISTENTE EN LE si hay al menos una línea de la tabla de verdad completa en la que todos los enunciados son verdaderos. De lo contrario, es INCONSISTENTE.

Validez

Un argumento en español es válido si es lógicamente imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa al mismo tiempo. Un argumento es VÁLIDO EN LE si no hay ninguna fila de la tabla de verdad completa en la que las premisas sean todas 1 y la conclusión sea 0; un argumento es INVÁLIDO EN LE si hay tal fila.

Observa este argumento:

$$\begin{array}{rl} & \neg L \rightarrow (J \vee L) \\ & \neg L \\ \therefore & J \end{array}$$

¿Es válido? Para averiguarlo, construimos una tabla de verdad.

J	L	$\neg L \rightarrow (J \vee L)$	$\neg$ L	J
1	1	0 1 **1** 1 1 1	**0** 1	**1**
1	0	1 0 **1** 1 1 0	**1** 0	**1**
0	1	0 1 **1** 0 1 1	**0** 1	**0**
0	0	1 0 **0** 0 0 0	**1** 0	**0**

Sí, el argumento es válido. La única fila en la que ambas premisas son 1 es la segunda, y en esa fila la conclusión también es 1.

3.4. Tablas de verdad parciales

Para mostrar que un enunciado es una tautología, tenemos que mostrar que es 1 en todas las filas. Así que necesitamos una tabla de verdad completa. Sin embargo, para mostrar que un enunciado *no* es una tautología, solo necesitamos una línea: una en la que el enunciado sea 0. Por tanto, para mostrar que algo no es una tautología, es suficiente proporcionar una *tabla de verdad parcial* de una línea —sin importar cuántas letras de enunciado pueda tener el enunciado.

Piensa, por ejemplo, en el enunciado $(U \& T) \rightarrow (S \& W)$. Queremos mostrar que *no* es una tautología proporcionando una tabla de verdad parcial. Ponemos 0 para el enunciado completo. La conectiva principal del enunciado es un condicional. Para que el condicional sea falso, el antecedente debe ser verdadero (1) y el consecuente debe ser falso (0). Así que ponemos eso en la tabla:

S	T	U	W	$(U \& T) \rightarrow (S \& W)$
				1 **0** 0

Para que $(U \& T)$ sea verdadero, tanto U como T deben ser verdaderos.

S	T	U	W	$(U \& T) \rightarrow (S \& W)$
	1	1		1 1 1 **0** 0

Ahora solo tenemos que hacer que $(S \& W)$ sea falso. Para ello, necesitamos hacer que, de S y W, al menos uno sea falso. Podemos hacer que tanto S como W sean falsos si queremos. Lo único importante es que el enunciado completo sea falso en esta línea. Tomando una decisión arbitraria, terminamos la tabla de esta forma:

S	T	U	W	$(U \& T) \rightarrow (S \& W)$
0	1	1	0	1 1 1 **0** 0 0 0

Para mostrar que algo es una contradicción necesitamos una tabla de verdad completa. Para mostrar que algo *no* es una contradicción necesitamos solo una tabla de verdad parcial de una línea, en la que el enunciado sea verdadero.

Un enunciado es contingente si no es ni una tautología ni una contradicción. Así que para mostrar que un enunciado es contingente solo necesitamos una tabla de verdad parcial *de dos líneas*: el enunciado debe ser verdadero en una línea y falso en la otra. Por ejemplo, podemos mostrar que el anterior enunciado es contingente con esta tabla de verdad:

S	T	U	W	$(U$	$\&$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\&$	$W)$
0	1	1	0	1	1	1	**0**	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	**1**	0	0	0

Fíjate en que hay muchas combinaciones de valores de verdad que habrían hecho que el enunciado fuera verdadero, así que hay muchas formas en que podríamos haber hecho la segunda línea.

Para mostrar que un enunciado *no* es contingente tenemos que proporcionar una tabla de verdad completa, porque tenemos que mostrar que el enunciado es una tautología o que es una contradicción. Si no sabes si un enunciado concreto es contingente, entonces no sabes si necesitarás una tabla de verdad completa o una parcial. Siempre puedes empezar a trabajar en una tabla de verdad completa. Si completas filas que muestran que el enunciado es contingente, puedes parar. Si no, termina la tabla de verdad. Aunque dos filas cuidadosamente escogidas mostrarán que un enunciado contingente es contingente, no hay nada malo en completar más filas.

Para mostrar que dos enunciados son lógicamente equivalentes necesitamos proporcionar una tabla de verdad completa. Para mostrar que dos enunciados *no* son lógicamente equivalentes solo necesitamos una tabla de verdad parcial de una línea: hay que hacer la tabla de manera que un enunciado sea verdadero y el otro falso.

Para mostrar que un conjunto de enunciados es consistente tenemos que proporcionar una fila de la tabla de verdad en la que todos los enunciados sean verdaderos. El resto de la tabla es irrelevante, así que basta con una tabla de verdad parcial de una línea. Por otro lado, para mostrar que un conjunto de enunciados es inconsistente, necesitamos una tabla de verdad completa: hay que mostrar que en cada una de las filas de la tabla al menos uno de los enunciados es falso.

Para mostrar que un argumento es válido necesitamos una tabla de verdad completa. Para mostrar que un argumento es *inválido* solo tenemos que proporcionar una tabla de verdad de una línea: si se puede hacer una línea en la que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa, entonces el argumento es

	SÍ	NO
¿tautología?	tabla de verdad completa	tabla de verdad parcial de una línea
¿contradicción?	tabla de verdad completa	tabla de verdad parcial de una línea
¿contingente?	tabla de verdad parcial de dos líneas	tabla de verdad completa
¿equivalentes?	tabla de verdad completa	tabla de verdad parcial de una línea
¿consistente?	tabla de verdad parcial de una línea	tabla de verdad completa
¿válido?	tabla de verdad completa	tabla de verdad parcial de una línea

Tabla 3.2: ¿Necesitas una tabla de verdad parcial o una tabla de verdad completa? Depende de lo que estés intentando mostrar.

inválido.

La tabla 3.2 resume los casos en que se necesita una tabla de verdad completa y aquellos en que basta con una tabla de verdad parcial.

Ejercicios

Si quieres ejercicios adicionales, puedes construir las tablas de verdad de cualquiera de los enunciados y argumentos de los ejercicios del capítulo anterior.

$\star$ **Parte A** Determina si cada enunciado es una tautología, una contradicción, o un enunciado contingente. Justifica tu respuesta con una tabla de verdad completa o parcial según proceda.

1. $A \rightarrow A$
2. $\neg B \,\&\, B$
3. $C \rightarrow \neg C$
4. $\neg D \vee D$
5. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow \neg B)$
6. $(A \,\&\, B) \vee (B \,\&\, A)$
7. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
8. $\neg[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$
9. $(A \,\&\, B) \rightarrow (B \vee A)$
10. $A \leftrightarrow [A \rightarrow (B \,\&\, \neg B)]$
11. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \,\&\, \neg B)$
12. $\neg(A \,\&\, B) \leftrightarrow A$
13. $\big[(A \,\&\, B) \,\&\, \neg(A \,\&\, B)\big] \,\&\, C$
14. $A \rightarrow (B \vee C)$
15. $[(A \,\&\, B) \,\&\, C] \rightarrow B$
16. $(A \,\&\, \neg A) \rightarrow (B \vee C)$
17. $\neg\big[(C \vee A) \vee B\big]$
18. $(B \,\&\, D) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \vee C)]$

⋆ **Parte B** Determina si cada par de enunciados es lógicamente equivalente. Justifica tu respuesta con una tabla de verdad completa o parcial según proceda.

1. A, $\neg A$
2. A, $A \vee A$
3. $A \rightarrow A$, $A \leftrightarrow A$
4. $A \vee \neg B$, $A \rightarrow B$
5. $A \,\&\, \neg A$, $\neg B \leftrightarrow B$
6. $\neg(A \,\&\, B)$, $\neg A \vee \neg B$
7. $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg A \rightarrow \neg B$
8. $(A \rightarrow B)$, $(\neg B \rightarrow \neg A)$
9. $[(A \vee B) \vee C]$, $[A \vee (B \vee C)]$
10. $[(A \vee B) \,\&\, C]$, $[A \vee (B \,\&\, C)]$

⋆ **Parte C** Determina si cada conjunto de enunciados es consistente o inconsistente. Justifica tu respuesta con una tabla de verdad completa o parcial según proceda.

1. $A \rightarrow A$, $\neg A \rightarrow \neg A$, $A \,\&\, A$, $A \vee A$
2. $A \,\&\, B$, $C \rightarrow \neg B$, C
3. $A \vee B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$
4. $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, A, $\neg C$
5. $B \,\&\, (C \vee A)$, $A \rightarrow B$, $\neg(B \vee C)$
6. $A \vee B$, $B \vee C$, $C \rightarrow \neg A$
7. $A \leftrightarrow (B \vee C)$, $C \rightarrow \neg A$, $A \rightarrow \neg B$
8. A, B, C, $\neg D$, $\neg E$, F

⋆ **Parte D** Determina si cada argumento es válido o inválido. Justifica tu respuesta con una tabla de verdad completa o parcial según proceda.

1. $A \rightarrow A$, $\therefore A$
2. $A \vee \big[A \rightarrow (A \leftrightarrow A)\big]$, $\therefore$ A
3. $A \rightarrow (A \,\&\, \neg A)$, $\therefore \neg A$
4. $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A)$, $\therefore A$
5. $A \vee (B \rightarrow A)$, $\therefore \neg A \rightarrow \neg B$
6. $A \rightarrow B$, B, $\therefore A$
7. $A \vee B$, $B \vee C$, $\neg A$, $\therefore B \,\&\, C$
8. $A \vee B$, $B \vee C$, $\neg B$, $\therefore A \,\&\, C$
9. $(B \,\&\, A) \rightarrow C$, $(C \,\&\, A) \rightarrow B$, $\therefore (C \,\&\, B) \rightarrow A$
10. $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $\therefore A \leftrightarrow C$

⋆ **Parte E** Responde a cada una de las siguientes preguntas y justifica tu respuesta.

1. Supón que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son lógicamente equivalentes. ¿Qué puedes decir sobre $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$?
2. Supón que $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}$ es contingente. ¿Qué puedes decir sobre el argumento "$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\therefore \mathcal{C}$"?
3. Supón que $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ es inconsistente. ¿Qué puedes decir sobre $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})$?
4. Supón que $\mathcal{A}$ es una contradicción. ¿Qué puedes decir sobre el argumento "$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\therefore \mathcal{C}$"?
5. Supón que $\mathcal{C}$ es una tautología. ¿Qué puedes decir sobre el argumento "$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\therefore \mathcal{C}$"?
6. Supón que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son lógicamente equivalentes. ¿Qué puedes decir sobre $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$?
7. Supón que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ *no* son lógicamente equivalentes. ¿Qué puedes decir sobre $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$?

Parte F Podríamos dejar el bicondicional ($\leftrightarrow$) fuera del lenguaje. Si lo hiciéramos, aún podríamos escribir '$A \leftrightarrow B$' para que los enunciados fueran más fáciles de leer, pero eso sería una abreviatura de $(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$. El lenguaje resultante sería formalmente equivalente a la LE, ya que $A \leftrightarrow B$ y $(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$ son lógicamente equivalentes en LE. Si valorásemos la simplicidad formal por encima de la riqueza expresiva, podríamos sustituir más conectivas por convenciones de notación y aun así tener un lenguaje equivalente a la LE.

Hay varios lenguajes equivalentes con solo dos conectivas. Sería suficiente tener solo la negación y el condicional material. Muestra esto escribiendo enunciados que sean lógicamente equivalentes a cada uno de los siguientes usando únicamente paréntesis, letras de enunciado, la negación ($\neg$) y el condicional material ($\rightarrow$).

⋆ 1. $A \vee B$
⋆ 2. $A \,\&\, B$
⋆ 3. $A \leftrightarrow B$

Podríamos tener un lenguaje que fuese equivalente a la LE, pero únicamente con la negación y la disyunción como conectivas. Muestra esto: usando únicamente paréntesis, letras de enunciado, la negación ($\neg$) y la disyunción ($\vee$), escribe enunciados que sean lógicamente equivalentes a cada uno de los siguientes.

4. $A \,\&\, B$
5. $A \rightarrow B$
6. $A \leftrightarrow B$

La *barra de Sheffer* es una conectiva lógica con la siguiente tabla de verdad característica:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\vert\mathcal{B}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

7. Escribe un enunciado usando las conectivas de la LE que sea lógicamente equivalente a $(A|B)$.

Todo enunciado que esté escrito usando una conectiva de la LE puede ser reescrito como un enunciado lógicamente equivalente usando una o más barras de Sheffer. Usando solo la barra de Sheffer, escribe enunciados que sean equivalentes a cada uno de los siguientes.

8. $\neg A$
9. $(A \,\&\, B)$
10. $(A \vee B)$
11. $(A \rightarrow B)$
12. $(A \leftrightarrow B)$

Capítulo 4

Lógica cuantificacional

Este capítulo presenta un lenguaje lógico llamado LC. Es una versión de la *lógica cuantificacional*, porque permite cuantificadores como *todos* y *algunos*. La lógica cuantificacional a veces también es llamada *lógica de predicados*, porque las unidades básicas del lenguaje son predicados y términos.

4.1. De los enunciados a los predicados

Observa el siguiente argumento, que obviamente es válido en español

> Si todos saben lógica, entonces o ninguno estará confundido o todos lo estarán. Todos estarán confundidos solo si intentamos creer una contradicción. Esta es una clase de lógica, así que todos saben lógica. $\therefore$ Si no intentamos creer una contradicción, entonces ninguno estará confundido.

Para simbolizar esto en LE, necesitamos una clave de simbolización.

L: Todos saben lógica.
N: Ninguno estará confundido.
E: Todos estarán confundidos.
B: Intentamos creer una contradicción.

Fíjate en que N y E hablan sobre personas que están confusas, pero son dos letras de enunciado separadas. No podríamos reemplazar E por $\neg N$. ¿Por qué no? $\neg N$ significa 'No se da el caso de que ninguno estará confundido'. Este sería el caso si al menos una persona estuviera confundida, así que es muy distinto de decir que *todos* estarán confundidos.

Sin embargo, desde el momento en que tenemos letras de enunciado separadas para N y E, se elimina toda conexión entre los dos. Solo son dos enunciados atómicos que podrían ser verdaderos o falsos de manera independiente. En español nunca podría darse el caso de que todos y ninguno estén confundidos. No obstante, como enunciados de la LE, hay una asignación de valores de verdad para la que tanto N como E son verdaderos.

Las expresiones como 'ninguno', 'todos' y 'cualquiera' se llaman *cuantificadores*. Al traducir N y E como enunciados atómicos separados, omitimos la *estructura del cuantificador* de los enunciados. Afortunadamente, la estructura del cuantificador no es lo que hace que el argumento sea válido. Por lo tanto, podemos ignorarla sin problemas. Para ver esto, traducimos el argumento a la LE:

$$
\begin{array}{rl}
 & L \to (N \vee E) \\
 & E \to B \\
 & L \\
\therefore & \neg B \to N
\end{array}
$$

Este es un argumento válido en LE. (Puedes hacer una tabla de verdad para comprobarlo.)

Piensa ahora en este otro argumento. También es válido en español.

> Willard es un lógico. Todos los lógicos llevan sombreros graciosos.
> ∴ Willard lleva un sombrero gracioso.

Para simbolizar esto en LE, definimos una clave de simbolización:

L: Willard es un lógico.
A: Todos los lógicos llevan sombreros graciosos.
F: Willard lleva un sombrero gracioso.

Ahora simbolizamos el argumento:

$$
\begin{array}{rl}
 & L \\
 & A \\
\therefore & F
\end{array}
$$

Esto es *inválido* en LE. (De nuevo, puedes confirmarlo con una tabla de verdad.) Algo va muy mal aquí, porque este argumento es claramente válido en español.

La simbolización en LE omite toda la estructura importante. De nuevo, la traducción a LE pasa por alto la estructura del cuantificador: el enunciado 'Todos los lógicos llevan sombreros graciosos' habla sobre lógicos y sobre llevar sombreros. Al no traducir esta estructura, perdemos la conexión entre el hecho de que Willard es un lógico y el hecho de que Willard lleva un sombrero.

Algunos argumentos con estructura de cuantificador pueden ser capturados en LE, como el primer ejemplo, a pesar de que la LE ignore la estructura de cuantificador. Otros argumentos quedan convertidos en una chapuza en LE, como el segundo ejemplo. Fíjate en que el problema no es que hayamos cometido un error al simbolizar el segundo argumento. Esas son las mejores simbolizaciones que podemos dar de esos argumentos *en LE*.

En general, si un argumento que contiene cuantificadores aparece como *válido en LE*, entonces el argumento en español en válido. Si aparece como *inválido en LE*, entonces no podemos decir que el argumento en español sea inválido. Podría ser válido debido a la estructura de cuantificador que tiene el argumento en lenguaje natural y de la que carece el argumento en LE.

De la misma forma, si un enunciado con cuantificadores aparece como una *tautología en LE*, entonces el enunciado en español es lógicamente verdadero. Si aparece como *contingente en LE*, eso podría ser debido a que se elimina la estructura de los cuantificadores cuando lo traducimos al lenguaje formal.

Para simbolizar argumentos que dependen de una estructura de cuantificador, tenemos que elaborar un lenguaje lógico diferente. Llamaremos a este lenguaje lógica cuantificacional, LC.

4.2. Las piezas de la LC

Así como los enunciados eran las unidades básicas de la lógica de enunciados, los predicados serán las unidades básicas de la lógica cuantificacional. Un predicado es una expresión como 'es un perro'. En sí misma no es un enunciado. No es ni verdadera ni falsa. Para ser verdadera o falsa, tenemos que especificar algo: ¿quién o qué es lo que es un perro?

Los detalles de esto se explicarán en el resto del capítulo, pero la idea básica es esta: en la LC representaremos los predicados con letras mayúsculas. Por ejemplo, podemos hacer que D signifique '_____ es un perro'. Usaremos letras minúsculas como nombres de cosas específicas. Por ejemplo, podemos hacer que b signifique Bertie. La expresión Db será un enunciado de la LC. Es una traducción del enunciado 'Bertie es un perro'.

Para representar la estructura de cuantificador, también tendremos símbolos que representen cuantificadores. Por ejemplo, '$\exists$' significará 'Hay algún_____'. Así que para decir que hay un perro, podemos escribir $\exists x Dx$; es decir: hay algún x tal que x es un perro.

Eso vendrá más tarde. Comenzamos definiendo los términos singulares y los predicados.

Términos Singulares

En español, un TÉRMINO SINGULAR es una palabra o frase que se refiere a una persona, lugar o cosa *específica*. La palabra 'perro' no es un término singular, porque hay muchos perros. La expresión 'Bertie, el perro de Philip' es un término singular, porque se refiere a un pequeño terrier específico.

Un NOMBRE PROPIO es un término singular que destaca a un individuo sin describirlo. El nombre 'Emerson' es un nombre propio, y el nombre por sí mismo no te dice nada sobre Emerson. Por supuesto, algunos nombres se dan tradicionalmente a los chicos y otros se dan tradicionalmente a las chicas. Si se usa 'Jack Hathaway' como término singular, puedes suponer que se refiere a un hombre. No obstante, el nombre no significa necesariamente que la persona a la que se refiere sea un hombre —o incluso que la criatura a la que se refiere sea una persona. Según lo que sabes solo por el nombre, Jack podría ser una jirafa. Hay muchas discusiones filosóficas alrededor de esta cuestión, pero lo importante aquí es que un nombre es un término singular porque selecciona un único individuo específico.

Otros términos singulares transmiten de manera más evidente información sobre aquello a lo que se refieren. Por ejemplo, no necesitas que te den más información para saber que 'Bertie, el perro de Philip' es un término singular que se refiere a un perro. Una DESCRIPCIÓN DEFINIDA selecciona un individuo por medio de una descripción única. En español, las descripciones definidas son a menudo expresiones de la forma 'el tal y tal'. Se refieren a *la* cosa específica que concuerde con la descripción dada. Por ejemplo, 'el miembro más alto de los Monty Python' y 'el primer emperador de China' son descripciones definidas. Una descripción que no seleccione un individuo específico no es una descripción definida. 'Un miembro de los Monty Python' y 'un emperador de China' no son descripciones definidas.

Podemos usar nombres propios y descripciones definidas para destacar la misma cosa. El nombre propio 'Monte Rainier' denomina la ubicación destacada por la descripción definida 'el pico más alto del estado de Washington'. Si te digo que voy a ir al Monte Rainier, no descubrirás nada nuevo a menos que ya sepas algo de geografía. Tal vez podrías suponer que es una montaña, pero ni siquiera esto es seguro; por lo que sabes podría ser una universidad, como Monte Holyoke. Pero si te dijera que voy a ir al pico más alto del estado de Washington, sabrías inmediatamente que voy a ir a una montaña en el estado de Washington.

En español, la especificación de un término singular puede depender del contexto; 'Willard' significa una persona específica y no simplemente alguien llamado Willard; 'P.D. Magnus', como término singular lógico, significa *yo* y no el otro P.D. Magnus. En español vivimos con este tipo de ambigüedad, pero es importante recordar que los términos singulares en LC deben referirse solo a una cosa específica.

En LC, simbolizaremos los términos singulares con letras minúsculas, de la a a la w. Podemos añadir subíndices si queremos usar alguna letra más de una vez. Así que $a, b, c, \ldots w, a_1, f_{32}, j_{390}$, y m_{12} son todos términos en LC.

Los términos singulares se llaman CONSTANTES porque seleccionan individuos específicos. Fíjate en que x, y y z no son constantes en LC. Serán VARIABLES, letras que no representan ninguna cosa específica. Las necesitaremos cuando introduzcamos los cuantificadores.

Predicados

Los predicados más simples son propiedades de individuos. Son cosas que se pueden decir sobre un objeto. '_____ es un perro' y '_____ es un miembro de los Monty Python' son predicados. Al traducir enunciados del español, el término no siempre irá al principio del enunciado: 'Un piano cayó en _____' también es un predicado. Predicados como estos se llaman UNARIOS O MONÁDICOS porque solo hay un hueco que rellenar. Un predicado unario y un término singular se combinan para formar un enunciado.

Otros predicados hablan de la *relación* entre dos cosas. Por ejemplo, '_____ es mayor que _____', '_____ está a la izquierda de _____', y '_____ debe dinero a _____'. Estos son predicados BINARIOS O DIÁDICOS, porque tienen que rellenarse con dos términos para formar un enunciado.

En general, los predicados se pueden considerar como enunciados esquemáticos que tienen que rellenarse con un cierto número de términos. Por el contrario, puedes empezar con los enunciados y hacer predicados a partir de ellos suprimiendo términos. Piensa en el enunciado 'Vinnie tomó prestado el coche familiar de Nunzio'. Al suprimir un término singular, podemos ver que este enunciado usa uno de estos tres predicados monádicos diferentes:

_____tomó prestado el coche familiar de Nunzio.
Vinnie tomó prestado _____de Nunzio.
Vinnie tomó prestado el coche familiar de _____.

Al suprimir dos términos singulares, podemos reconocer tres predicados diádicos diferentes:

Vinnie tomó prestado _____ de _____.
_____ tomó prestado el coche familiar de _____.
_____ tomó prestado _____ de Nunzio.

Al suprimir los tres términos singulares, podemos reconocer un predicado TERNARIO O TRIÁDICO:

_____ tomó prestado _____ de _____.

Si estamos traduciendo este enunciado a la LC, ¿debemos traducirlo con un predicado unario, binario o ternario? Depende de lo que queramos poder decir. Si lo único de lo que vamos a hablar es el coche familiar que se toma prestado, entonces la generalidad del predicado ternario es innecesaria. Si lo único que tenemos que simbolizar es que diferentes personas toman prestado el coche familiar de Nunzio, entonces un predicado unario será suficiente.

En general, podemos tener predicados con tantos huecos como necesitemos. Los predicados con más de un hueco se llaman POLIÁDICOS. Los predicados con n huecos, para algún número n, se llaman N-ARIOS O N-ÁDICOS.

En la LC simbolizamos los predicados con letras mayúsculas, de la A a la Z, con o sin subíndices. Cuando demos una clave de simbolización para los predicados, no usaremos espacios en blanco; en lugar de ello, usaremos variables. Por convención, las constantes se enumeran al final de la clave. Así que podríamos escribir una clave que fuera así:

Ax: x está enfadado.
Hx: x está contento.
$\mathbf{T_1}$xy: x es tanto o más alto que y.
$\mathbf{T_2}$xy: x es tanto o más duro que y.
Bxyz: y está entre x y z.
d: Donald
g: Gregor
m: Marybeth

Podemos simbolizar enunciados que usen cualquier combinación de estos predicados y términos. Por ejemplo:

1. Donald está enfadado.
2. Si Donald está enfadado, entonces Gregor y Marybeth también.
3. Marybeth es al menos tan alta y tan dura como Gregor.

4. Donald es más bajo que Gregor.
5. Gregor está entre Donald y Marybeth.

El enunciado 1 es sencillo: Ad. La 'x' en la línea de la clave 'Ax' es solo un parámetro; podemos sustituirlo por otros términos al traducir.

El enunciado 2 puede parafrasearse como 'Si Ad, entonces Ag y Am'. La LC tiene todas las conectivas veritativo-funcionales de la LE, así que traducimos esto como $Ad \rightarrow (Ag \,\&\, Am)$.

El enunciado 3 puede traducirse como $T_1mg \,\&\, T_2mg$.

Puede parecer que el enunciado 4 necesita un nuevo predicado. Si solo tuviéramos que simbolizar este enunciado, podríamos definir un predicado como Sxy que significara 'x es más bajo que y'. Sin embargo, así no tendríamos en cuenta la conexión lógica entre 'más bajo' y 'más alto'. Considerados solo como símbolos de la LC, no hay conexión entre S y T_1. Podrían significar cualquier cosa. En lugar de introducir un predicado nuevo, parafraseamos el enunciado 4 usando predicados que ya están en nuestra clave: 'No se da el caso de que Donald sea tanto o más alto que Gregor'. Podemos traducirlo como $\neg T_1dg$.

El enunciado 5 requiere que prestemos atención al orden de los términos en la clave. Se convierte en $Bdgm$.

4.3. Cuantificadores

Ya estamos preparados para introducir los cuantificadores. Observa estos enunciados:

6. Todos están contentos.
7. Todos son al menos tan duros como Donald.
8. Alguien está enfadado.

Puede ser tentador traducir el enunciado 6 como $Hd \,\&\, Hg \,\&\, Hm$. Sin embargo, eso solo diría que Donald, Gregor y Marybeth están contentos. Lo que queremos es decir que *todos* están contentos, incluso aunque no hayamos definido una constante para nombrarlos. Para hacer esto, introducimos el símbolo '$\forall$'. Se llama CUANTIFICADOR UNIVERSAL.

Un cuantificador siempre debe ir seguido de una variable y de una fórmula que incluya esa variable. Podemos traducir el enunciado 6 como $\forall xHx$. Parafraseado en español, esto significa 'Para todo x, x está contento'. Llamamos a $\forall x$ un *cuantificador-x*. La fórmula que sigue al cuantificador se llama *rango* del cuantificador. Daremos una definición formal del rango más adelante, pero intuitivamente es la parte del enunciado sobre la que cuantifica el cuantificador. En $\forall xHx$, el rango del cuantificador universal es Hx.

El enunciado 7 puede parafrasearse como 'Para todo x, x es al menos tan duro como Donald'. Esto se traduce como $\forall xT_2xd$.

En estos enunciados cuantificados, la variable x funciona como una especie de parámetro. La expresión $\forall x$ significa que puedes elegir cualquiera y ponerlo en el lugar de la x. No hay ninguna razón especial para usar la x en lugar de alguna otra variable. El enunciado $\forall xHx$ significa exactamente lo mismo que $\forall yHy$, $\forall zHz$, y $\forall x_5Hx_5$.

Para traducir el enunciado 8 introducimos otro símbolo nuevo: el CUANTIFICADOR EXISTENCIAL, $\exists$. Al igual que el cuantificador universal, el cuantificador existencial requiere una variable. El enunciado 8 puede traducirse como $\exists xAx$. Esto significa que hay algún x que está enfadado. Dicho con mayor precisión, significa que hay *al menos una* persona enfadada. De nuevo, la variable es una especie de parámetro; podríamos haber traducido igualmente el enunciado 8 como $\exists zAz$.

Piensa en estos otros enunciados:

9. Nadie está enfadado.
10. Hay alguien que no está contento.
11. No todos están contentos.

El enunciado 9 puede parafrasearse como 'No se da el caso de que alguien esté enfadado'. Esto puede traducirse usando la negación y un cuantificador existencial: $\neg\exists xAx$. Pero el enunciado 9 también podría traducirse como 'Todos no están enfadados'[1]. Con esto en mente, puede traducirse usando la negación y un cuantificador universal: $\forall x\neg Ax$. Ambas son traducciones aceptables, ya que son lógicamente equivalentes. Lo crítico es si la negación va antes o después del cuantificador.

En general, $\forall x\mathcal{A}$ es lógicamente equivalente a $\neg\exists x\neg\mathcal{A}$. Esto significa que cualquier enunciado que pueda simbolizarse con un cuantificador universal puede simbolizarse con un cuantificador existencial, y viceversa. Puede que una de las traducciones parezca más natural que la otra, pero no hay diferencia lógica en traducir con un cuantificador o con otro. Con algunos enunciados, será simplemente una cuestión de gustos.

[1] En español este enunciado contiene una ambigüedad problemática. En adelante, se entenderá que los enunciados del tipo 'Todos no están enfadados' significan que *nadie* está enfadado, mientras que los enunciados del tipo 'No todos están enfadados' significan que *alguien no* está enfadado. (N. del T.)

La paráfrasis más natural del enunciado 10 es 'Hay algún x tal que x no está contento'. Esto se convierte en $\exists x \neg Hx$. De manera equivalente, podríamos escribir $\neg\forall x Hx$.

La traducción más natural del enunciado 11 es $\neg\forall x Hx$. Esto es lógicamente equivalente al enunciado 10, así que también podría traducirse como $\exists x \neg Hx$.

Aunque tenemos dos cuantificadores en la LC, podríamos tener un lenguaje formal equivalente con solo un cuantificador. Podríamos trabajar solo con el cuantificador universal, por ejemplo, y tratar el cuantificador existencial como una convención de notación. Usamos los corchetes [ ] para que los enunciados sean más legibles, pero sabemos que en realidad no son más que paréntesis ( ). De la misma forma, podríamos escribir '$\exists x$' sabiendo que esto es solo una abreviatura de '$\neg\forall x\neg$'. Se puede elegir entre hacer que la lógica sea formalmente simple y hacer que sea expresivamente simple. En la LC, optamos por la simplicidad expresiva. Tanto $\forall$ como $\exists$ serán símbolos de la LC.

Universo del discurso

Dada la clave de simbolización que hemos usado, $\forall x Hx$ significa 'Todos están contentos'. ¿Quién está incluido en ese *todos*? Cuando usamos enunciados como este en español, normalmente no nos referimos a todos los que están vivos ahora en la Tierra. Desde luego, no nos referimos a todos los que han vivido alguna vez o que vivirán. Lo que queremos decir es más modesto: todos los del edificio, todos los de la clase, o todos los de la sala.

Para eliminar esta ambigüedad, tendremos que especificar un UNIVERSO DEL DISCURSO —abreviado como UD. El UD es el conjunto de cosas sobre las que estamos hablando. Así que si queremos hablar sobre personas que están en Chicago, definimos el UD como personas en Chicago. Escribimos esto al comienzo de la clave de simbolización, así:

UD: personas en Chicago

Los cuantificadores *cubren* el universo del discurso. Dado este UD, $\forall x$ significa 'Todos los que están en Chicago' y $\exists x$ significa 'Alguien en Chicago'. Todas las constantes nombran a algún miembro del UD, así que solo podemos usar este UD con la anterior clave de simbolización si tanto Donald como Gregor y Marybeth están en Chicago. Si queremos hablar sobre personas que están en lugares diferentes de Chicago, entonces tenemos que incluirlas en el UD.

En la LC, el UD debe ser *no vacío*; es decir, debe incluir al menos una cosa. Es posible construir lenguajes formales que permitan UD vacíos, pero esto crea complicaciones.

Incluso si permitimos un UD con un solo miembro pueden producirse resultados extraños. Supón que tenemos la siguiente clave de simbolización:

UD: la Torre Eiffel
Px: x está en París.

El enunciado $\forall x Px$ puede parafrasearse en español como 'Todo está en París'. Pero esto sería engañoso. Significa que todo *lo que está en el UD* está en París. El UD solo contiene la Torre Eiffel, así que con esta clave de simbolización $\forall x Px$ simplemente significa que la Torre Eiffel está en París.

Términos no referenciales

En la LC, cada constante debe destacar exactamente un miembro del UD. Una constante no puede referirse a más de una cosa —es un término *singular*. Pero toda constante debe destacar *algo*. Esto está conectado con un problema filosófico clásico: el conocido como problema de los términos no referenciales.

Los filósofos medievales habitualmente usaban enunciados sobre la *quimera* para ejemplificar este problema. La quimera es una criatura mitológica; no existe realmente. Observa estos dos enunciados:

12. La quimera está enfadada.
13. La quimera no está enfadada.

Resulta tentador definir una constante que signifique 'quimera'. La clave de simbolización sería así:

UD: criaturas de la Tierra
Ax: x está enfadado.
c: quimera

Después podríamos traducir el enunciado 12 como Ac y el enunciado 13 como $\neg Ac$.

Los problemas surgirán cuando nos preguntemos si estos enunciados son verdaderos o falsos.

Una de las opciones es decir que el enunciado 12 no es verdadero, porque la quimera no existe. Si el enunciado 12 es falso porque habla sobre una cosa inexistente, entonces el enunciado 13 es falso por la misma razón. Pero esto significaría que tanto Ac como $\neg Ac$ serían falsos. Dadas las condiciones de verdad de la negación, esto no es posible.

Puesto que no podemos decir que ambos son falsos, ¿qué debemos hacer? Otra opción es decir que el enunciado 12 *carece de significado* porque habla sobre una cosa inexistente. Así que Ac sería una expresión con significado en LC para algunas interpretaciones pero no para otras. Pero esto haría que nuestro lenguaje formal fuese un rehén de determinadas interpretaciones. Dado que estamos interesados en la forma lógica, queremos considerar la fuerza lógica de un enunciado como Ac independientemente de cualquier interpretación concreta. Si Ac a veces careciera de significado y otras veces tuviera significado, no podríamos hacer eso.

Este es el *problema de los términos no referenciales*, al que volveremos más adelante (ver p. 77.) Lo importante por ahora es que cada constante de la LC *debe* referirse a algo en el UD, aunque el UD puede ser cualquier conjunto de cosas que queramos. Si queremos simbolizar argumentos sobre criaturas mitológicas, entonces debemos definir un UD que las incluya. Esta opción es importante si queremos tener en cuenta la lógica de las historias. Podemos traducir un enunciado como 'Sherlock Holmes vivió en el 221B de Baker Street' incluyendo caracteres ficticios como Sherlock Holmes en nuestro UD.

4.4. Traducir a LC

Ahora ya tenemos todas las piezas de la LC. Traducir enunciados más complicados solo será cuestión de saber cuál es la forma correcta de combinar predicados, constantes, cuantificadores, variables y conectivas. Observa estos enunciados:

14. Todas las monedas de mi bolsillo son de 25 céntimos.
15. Algunas de las monedas que están sobre la mesa son de 10 céntimos.
16. No todas las monedas que están sobre la mesa son de 10 céntimos.
17. Ninguna de las monedas de mi bolsillo es de 10 céntimos.

Al proporcionar una clave de simbolización, tenemos que especificar un UD. Dado que estamos hablando sobre monedas que están en mi bolsillo y sobre la mesa, el UD debe contener al menos todas esas monedas. Dado que no estamos hablando sobre nada más que monedas, sea el UD todas las monedas. Puesto que no estamos hablando sobre ninguna moneda en concreto, no necesitamos definir ninguna constante. Así que definimos esta clave:

UD: todas las monedas
Px: x está en mi bolsillo.
Tx: x está en la mesa.
Qx: x es de 25 céntimos.
Dx: x es de 10 céntimos.

El enunciado 14 se traduce de manera más natural con un cuantificador universal. El cuantificador universal dice algo sobre todo el UD, no solo sobre las monedas de mi bolsillo. El enunciado 14 significa que (para cualquier moneda) *si* esa moneda está en mi bolsillo, *entonces* es de 25 céntimos. Así que podemos traducirlo como $\forall x(Px \to Qx)$.

Dado que el enunciado 14 habla sobre monedas que están en mi bolsillo *y* que son de 25 céntimos, puede resultar tentador traducirlo usando una conjunción. Sin embargo, el enunciado $\forall x(Px \,\&\, Qx)$ significaría que todas las cosas del UD están en mi bolsillo y son de 25 céntimos: todas las monedas que existen son de 25 céntimos y están en mi bolsillo. Esto sería algo loco, y significa algo muy diferente del enunciado 14.

El enunciado 15 se traduce de manera más natural con un cuantificador existencial. Dice que hay alguna moneda que está sobre la mesa y es de 10 céntimos. Así que podemos traducirlo como $\exists x(Tx \,\&\, Dx)$.

Date cuenta de que tuvimos que usar un condicional con el cuantificador universal, pero usamos una conjunción con el cuantificador existencial. ¿Qué significaría si escribiéramos $\exists x(Tx \to Dx)$? Probablemente no sea lo que estás pensando. Significa que hay algún miembro del UD que satisfaría la subfórmula; por así decirlo, hay algún a tal que $(Ta \to Da)$ es verdadero. En la LE, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, y esto es así también en la LC. Así que $\exists x(Tx \to Dx)$ es verdadero si hay algún a tal que $(\neg Ta \vee Da)$; es decir, es verdadero si alguna moneda *o bien* no está sobre la mesa *o* es de 10 céntimos. Por supuesto, hay una moneda que no está sobre la mesa —hay monedas en muchos otros lugares. Así que $\exists x(Tx \to Dx)$ es trivialmente verdadero. Un condicional será normalmente la conectiva más natural de usar con un cuantificador universal, pero un condicional dentro del rango de un cuantificador existencial puede hacer cosas muy extrañas. Como regla general, no pongas condicionales en el rango de cuantificadores existenciales a menos que estés seguro de que necesitas uno.

El enunciado 16 puede parafrasearse como 'No se da el caso de que todas las monedas que están sobre la mesa sean de 10 céntimos'. Así que podemos traducirlo como $\neg\forall x(Tx \to Dx)$. Puede que veas el enunciado 16 y lo parafrasees más bien como 'Alguna moneda encima de la mesa no es de 10 céntimos'. Después lo traducirías como $\exists x(Tx \,\&\, \neg Dx)$. Aunque probablemente no sea evidente, estas dos traducciones son lógicamente equivalentes. (Esto es debido a la equivalencia lógica entre $\neg\forall x\mathcal{A}$ y $\exists x\neg\mathcal{A}$, así como a la equivalencia entre $\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ y $\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{B}$.)

El enunciado 17 puede parafrasearse como 'No se da el caso de que haya alguna moneda de 10 céntimos en mi bolsillo'. Esto puede traducirse como $\neg\exists x(Px \,\&\, Dx)$. También puede parafrasearse como 'Todo lo que hay en mi bolsillo no es una moneda de 10 céntimos', y después podría traducirse como $\forall x(Px \to \neg Dx)$. De nuevo, las dos traducciones son lógicamente equivalentes. Ambas son traducciones correctas del enunciado 17.

Ahora podemos traducir el argumento de la p. 51, el que motivó la necesidad de cuantificadores.

> Willard es un lógico. Todos los lógicos llevan sombreros graciosos.
> ∴ Willard lleva un sombrero gracioso.

UD: personas
Lx: x es un lógico.
Fx: x lleva un sombrero gracioso.
w: Willard

Al traducir, obtenemos:

$$\begin{array}{rl} & Lw \\ & \forall x(Lx \rightarrow Fx) \\ \therefore & Fw \end{array}$$

Esto captura la estructura que se omitía en la traducción del argumento a la LE, y es un argumento válido en la LC.

Predicados vacíos

Un predicado no tiene por qué aplicarse a algo en el UD. Un predicado que no se aplica a nada del UD se llama predicado VACÍO.

Supón que queremos simbolizar estos dos enunciados:

18. Todos los monos saben lengua de signos.
19. Algún mono sabe lengua de signos.

Es posible escribir la clave de simbolización para estos enunciados de esta manera:

UD: animales
Mx: x es un mono.
Sx: x sabe lengua de signos.

El enunciado 18 puede traducirse ahora como $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$.

El enunciado 19 se convierte en $\exists x(Mx \,\&\, Sx)$.

Es tentador decir que el enunciado 18 implica el enunciado 19; es decir: si todos los monos saben lengua de signos, entonces debe ser que algún mono sabe lengua de signos. Esta es una inferencia válida en la lógica aristotélica: Todos los M son S, $\therefore$ Algún M es S. Sin embargo, esta implicación no se da en la LC. Es posible que el enunciado $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$ sea verdadero aunque el enunciado $\exists x(Mx \,\&\, Sx)$ sea falso.

¿Cómo puede ser esto? Encontramos la respuesta al considerar si estos enunciados serían verdaderos o falsos *si no hubiera monos.*

Hemos definido $\forall$ y $\exists$ de tal forma que $\forall \mathcal{A}$ es equivalente a $\neg\exists\neg\mathcal{A}$. De esta forma, el cuantificador universal no implica la existencia de nada —solo la inexistencia. Si el enunciado 18 es verdadero, entonces *no* hay monos que no sepan lengua de signos. Si no hubiera monos, entonces $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$ sería verdadero y $\exists x(Mx \,\&\, Sx)$ sería falso.

Permitimos que haya predicados vacíos porque queremos poder decir cosas como 'No sé si hay monos, pero cualquier mono que haya sabe lengua de signos'. Es decir, queremos poder tener predicados que no se refieran (o que podrían no referirse) a nada.

¿Qué ocurre si añadimos un predicado vacío R a la interpretación anterior? Por ejemplo, podríamos definir Rx de modo que significase 'x es un frigorífico'. Ahora el enunciado $\forall x(Rx \rightarrow Mx)$ será verdadero. Esto es contraintuitivo, ya que no queremos decir que hay un montón de monos frigoríficos. Es importante recordar, sin embargo, que $\forall x(Rx \rightarrow Mx)$ significa que cualquier miembro del UD que sea un frigorífico es un mono. Dado que el UD son animales, no hay frigoríficos en el UD y por tanto el enunciado es trivialmente verdadero.

Si realmente estuvieras traduciendo el enunciado 'Todos los frigoríficos son monos', entonces te interesaría incluir los electrodomésticos en el UD. De este modo, el predicado R no estaría vacío y el enunciado $\forall x(Rx \rightarrow Mx)$ sería falso.

Escoger un universo del discurso

La simbolización apropiada de un enunciado del español en la LC dependerá de la clave de simbolización. En cierto modo, esto es obvio: es importante si Dx significa 'x es delicado' o 'x es peligroso'. El significado de los enunciados en la LC también depende del UD.

Hagamos que Rx signifique 'x es una rosa', que Tx signifique 'x tiene una espina',

- Un UD debe tener *al menos* un miembro.
- Un predicado puede aplicarse a alguno, a todos o a ningún miembro del UD.
- Una constante debe seleccionar *exactamente* un miembro del UD.

  Un miembro del UD puede ser seleccionado por una constante, por muchas constantes, o por ninguna en absoluto.

y piensa en este enunciado:

20. Todas las rosas tienen una espina.

Es tentador decir que el enunciado 20 debería traducirse como $\forall x(Rx \rightarrow Tx)$. Si el UD contiene todas las rosas, eso será correcto. Pero si el UD es simplemente *cosas sobre la mesa de mi cocina*, entonces $\forall x(Rx \rightarrow Tx)$ solo significará que todas las rosas sobre la mesa de mi cocina tienen una espina. Si no hay rosas sobre la mesa de mi cocina, entonces el enunciado será trivialmente verdadero.

El cuantificador universal solo actúa sobre los miembros del UD, así que tenemos que incluir todas las rosas en el UD para traducir el enunciado 20. Tenemos dos opciones. En primer lugar, podemos restringir el UD para que incluya todas las rosas pero *solo* rosas. En tal caso el enunciado 20 se convierte en $\forall xTx$. Esto significa que todo en el UD tiene una espina; dado que el UD es solo el conjunto de las rosas, eso significa que todas las rosas tienen una espina. Esta opción puede ahorrarnos problemas si todos los enunciados que queremos traducir usando la clave de simbolización son sobre rosas.

En segundo lugar, podemos hacer que el UD contenga otras cosas además de rosas: rododendros, ratas, rifles y cualquier otra cosa. Entonces el enunciado 20 debe ser $\forall x(Rx \rightarrow Tx)$.

Si quisiéramos que el cuantificador universal significara *todas* las cosas, sin restricción, entonces podríamos intentar especificar un UD que contuviera todo. Esto crearía problemas. ¿Incluye 'todo' cosas que solo han sido imaginadas, como personajes ficticios? Por un lado, queremos ser capaces de simbolizar argumentos sobre Hamlet o Sherlock Holmes. Así que necesitamos tener la posibilidad de incluir personajes ficticios en el UD. Por otro lado, nunca necesitamos hablar sobre todo lo que no existe. Puede que eso ni siquiera tuviera sentido. Aquí hay problemas filosóficos en los que no vamos a intentar entrar. Podemos evitar estas dificultades especificando siempre el UD. Por ejemplo, si queremos hablar sobre plantas, personas y ciudades, entonces el UD puede ser 'cosas vivas y lugares'.

Supón que queremos traducir el enunciado 20 y, con la misma clave de simbolización, traducir estos enunciados:

21. Esmeralda tiene una rosa en el pelo.
22. Todos están enfadados con Esmeralda.

Necesitamos un UD que incluya rosas (para que podamos simbolizar el enunciado 20) y un UD que incluya a personas (para que podamos traducir los enunciados 21–22.) Una clave adecuada es esta:

UD: personas y plantas
Px: x es una persona.
Rx: x es una rosa.
Tx: x tiene una espina.
Cxy: x está enfadado con y.
Hxy: x tiene y en el pelo.
e: Esmeralda

Dado que no tenemos un predicado que signifique '… tiene una rosa en el pelo', necesitamos parafrasear el enunciado 21 para traducirlo. El enunciado dice que hay una rosa en el pelo de Esmeralda; es decir, hay algo que es una rosa y que está en el pelo de Esmeralda. Así que obtenemos: $\exists x(Rx \,\&\, Hex)$.

Resulta tentador traducir el enunciado 22 como $\forall x Cxe$. Por desgracia, esto significaría que todos los miembros del UD están enfadados con Esmeralda — tanto las personas como las plantas. Significaría, por ejemplo, que la rosa del pelo de Esmeralda está enfadada con ella. Por supuesto, el enunciado 22 no quiere decir eso.

'Todos' se refiere a todas las personas, no a todos los miembros del UD. Así que podemos parafrasear el enunciado 22 como 'Todas las personas están enfadadas con Esmeralda'. Ya sabemos cómo traducir enunciados como este: $\forall\, x(Px \rightarrow\ Cxe)$.

En general, el cuantificador universal puede usarse de modo que 'todos' se refiera a personas si el UD solo contiene personas. Si hay personas y otras cosas en el UD, entonces, si queremos que 'todos' se refiera a personas, debemos tratarlo como 'todas las personas'.

Traducir pronombres

Al traducir a LC es importante comprender la estructura de los enunciados que quieres traducir. Lo que importa es la traducción final en LC, y a veces podrás pasar directamente de un enunciado español a un enunciado de la LC.

En otras ocasiones, ayuda parafrasear el enunciado una o más veces. Cada una de las paráfrasis debe acercar el enunciado original a algo que puedas traducir directamente en LC.

Para los siguientes ejemplos, usaremos esta clave de simbolización:

UD: personas
Gx: x sabe tocar la guitarra.
Rx: x es una estrella del rock.
l: Lemmy

Ahora observa estos enunciados:

23. Si Lemmy sabe tocar la guitarra, entonces él es una estrella del rock.
24. Si alguien sabe tocar la guitarra, entonces él una estrella del rock.

El enunciado 23 y el enunciado 24 tienen el mismo consecuente ('… él es una estrella del rock'), pero no pueden ser traducidos de la misma forma. Sirve de ayuda parafrasear los enunciados originales, sustituyendo los pronombres por referencias explícitas.

El enunciado 23 puede parafrasearse como 'Si Lemmy sabe tocar la guitarra, entonces *Lemmy* es una estrella del rock'. Esto obviamente puede traducirse como $Gl \rightarrow Rl$.

El enunciado 24 debe parafrasearse de manera diferente: 'Si alguien sabe tocar la guitarra, entonces *esa persona* es una estrella del rock'. Este enunciado no habla sobre una persona en concreto, así que necesitamos una variable. Medio traduciendo, podemos parafrasear este enunciado como 'Para cualquier persona x, si x sabe tocar la guitarra, entonces x es una estrella del rock'. Ahora esto puede traducirse como $\forall x(Gx \rightarrow Rx)$. Esto es lo mismo que 'Todos los que saben tocar la guitarra son estrellas del rock'.

Piensa en estos otros enunciados:

25. Si alguien sabe tocar la guitarra, entonces Lemmy sabe.
26. Si alguien sabe tocar la guitarra, entonces él o ella es una estrella del rock.

Estos dos enunciados tienen el mismo antecedente ('Si alguien sabe tocar la guitarra…'), pero tienen estructuras lógicas diferentes.

En el enunciado 25, el antecedente y el consecuente son enunciados separados, así que puede simbolizarse con un condicional como operador lógico principal: $\exists x Gx \rightarrow Gl$.

El enunciado 26 puede parafrasearse 'Para cualquiera, si sabe tocar la guitarra, entonces es una estrella del rock'. Sería un error simbolizar esto con un cuantificador existencial, porque está hablando sobre todos. El enunciado es equivalente a 'Todos los que saben tocar la guitarra son estrellas del rock'. La mejor traducción es $\forall x(Gx \rightarrow Rx)$.

Las palabras españolas 'cualquiera' y 'alguien' normalmente deben traducirse usando cuantificadores. Como muestran estos dos ejemplos, a veces requieren un cuantificador existencial (como en el enunciado 25) y a veces un cuantificador universal (como en el enunciado 26). Si te cuesta mucho determinar cuál de los dos se requiere, parafrasea el enunciado con un enunciado de la lengua española que use palabras diferentes de 'cualquiera' y 'alguien'.

Cuantificadores y rango

En el enunciado $\exists xGx \rightarrow Gl$, el rango del cuantificador existencial es la expresión Gx. ¿Importaría que el rango del cuantificador fuera todo el enunciado? Es decir, ¿significa algo diferente el enunciado $\exists x(Gx \rightarrow Gl)$?

Con la clave que se ha dado antes, $\exists xGx \rightarrow Gl$ significa que, si hay algún guitarrista, entonces Lemmy es un guitarrista. $\exists x(Gx \rightarrow Gl)$ significaría que hay alguna persona tal que, si esa persona fuese un guitarrista, entonces Lemmy sería un guitarrista. Recuerda que aquí el condicional es un condicional material; el condicional es verdadero si el antecedente es falso. Hagamos que la constante p denote al autor de este libro, alguien que ciertamente no es un guitarrista. El enunciado $Gp \rightarrow Gl$ es verdadero porque Gp es falso. Puesto que alguien (es decir, p) satisface el enunciado, entonces $\exists x(Gx \rightarrow Gl)$ es verdadero. El enunciado es verdadero porque hay alguien que no es un guitarrista, independientemente de la habilidad de Lemmy con la guitarra.

Ha ocurrido algo extraño al cambiar el rango del cuantificador, porque el condicional en la LC es un condicional material. Para mantener el mismo significado, tendríamos que cambiar el cuantificador: $\exists xGx \rightarrow Gl$ significa lo mismo que $\forall x(Gx \rightarrow Gl)$, y $\exists x(Gx \rightarrow Gl)$ significa lo mismo que $\forall xGx \rightarrow Gl$.

Esta rareza no aparece con otras conectivas o si la variable está en el consecuente del condicional. Por ejemplo, $\exists xGx \,\&\, Gl$ significa lo mismo que $\exists x(Gx \,\&\, Gl)$, y $Gl \rightarrow \exists xGx$ significa lo mismo que $\exists x(Gl \rightarrow Gx)$.

Predicados ambiguos

Supón que solo queremos traducir este enunciado:

27. Adina es una cirujana experta.

Hagamos que el UD sean personas, que Kx signifique 'x es un cirujano experto', y que a signifique Adina. El enunciado 27 es simplemente Ka.

Pero supón ahora que queremos traducir este argumento:

> El hospital solo contratará a un cirujano experto. Todos los cirujanos son avariciosos. Billy es un cirujano, pero no es experto. Por lo tanto, Billy es avaricioso, pero el hospital no lo contratará.

Tenemos que distinguir entre ser un *cirujano experto* y ser meramente un *cirujano*. Así que definimos esta clave de simbolización:

UD: personas
Gx: x es avaricioso.
Hx: El hospital contratará a x.
Rx: x es un cirujano.
Kx: x es experto.
b: Billy

Ahora el argumento puede traducirse así:

$$\begin{array}{rl} & \forall x\big[\neg(Rx \,\&\, Kx) \rightarrow \neg Hx\big] \\ & \forall x(Rx \rightarrow Gx) \\ & Rb \,\&\, \neg Kb \\ \therefore & Gb \,\&\, \neg Hb \end{array}$$

Ahora supón que queremos traducir este argumento:

> Carol es una cirujana experta y una jugadora de tenis. Por lo tanto, Carol es una jugadora de tenis experta.

Si partimos de la clave de simbolización que usamos para el argumento anterior, podríamos añadir un predicado (que Tx signifique 'x es un jugador de tenis') y una constante (que c signifique Carol). Así el argumento es:

$$\begin{array}{rl} & (Rc \,\&\, Kc) \,\&\, Tc \\ \therefore & Tc \,\&\, Kc \end{array}$$

¡Esta traducción es un desastre! Toma un argumento que en español es horrible y lo traduce como un argumento válido en la LC. El problema es que hay una diferencia entre ser *experto como cirujano* y ser *experto como jugador de tenis*. La traducción correcta de este argumento requiere dos predicados diferentes, uno para cada tipo de habilidad. Si hacemos que K_1x signifique 'x es experto como cirujano' y que K_2x signifique 'x es experto como jugador de tenis', podemos simbolizar el argumento de esta forma:

$$
\begin{array}{ll}
 & (Rc \,\&\, K_1c) \,\&\, Tc \\
\therefore & Tc \,\&\, K_2c
\end{array}
$$

Al igual que el argumento en español del que es traducción, esto es inválido.

La moraleja de estos ejemplos es que se debe tener cuidado de no simbolizar predicados de manera ambigua. Pueden surgir problemas similares con predicados como *bueno*, *malo*, *grande* y *pequeño*. Al igual que los cirujanos expertos y los jugadores de tenis expertos son expertos en diferentes ámbitos, los perros grandes, los ratones grandes y los problemas grandes son grandes de maneras diferentes.

¿Es suficiente con tener un predicado que signifique 'x es un cirujano experto', en lugar de dos predicados 'x es experto' y 'x es cirujano'? A veces. Como muestra el enunciado 27, a veces no tenemos que distinguir entre cirujanos expertos y otros cirujanos.

¿Debemos distinguir siempre entre diferentes formas de ser experto, bueno, malo o grande? No. Como muestra el argumento de Billy, a veces solo tenemos que hablar sobre una forma de ser experto. Si estás traduciendo un argumento que solo habla de perros, está bien definir un predicado que signifique 'x es grande'. Sin embargo, si el UD incluye perros y ratones, probablemente sea mejor que el predicado signifique 'x es grande para un perro'.

Múltiples cuantificadores

Observa la siguiente clave de simbolización y los enunciados que le siguen:

UD: personas y perros
Dx: x es un perro.
Fxy: x es amigo de y.
Oxy: x es dueño de y.
f: Fifi
g: Gerald

28. Fifi es un perro.
29. Gerald es dueño de un perro.

30. Alguien es dueño de un perro.
31. Todos los amigos de Gerald son dueños de un perro.
32. Todos los dueños de un perro son amigos de un dueño de un perro.

El enunciado 28 es fácil: Df.

El enunciado 29 puede parafrasearse como 'Hay un perro del que Gerald es dueño'. Esto puede traducirse como $\exists x(Dx \,\&\, Ogx)$.

El enunciado 30 puede parafrasearse como 'Hay algún y tal que y es dueño de un perro'. El subenunciado 'y es dueño de un perro' es igual que el enunciado 29, excepto que habla sobre y en lugar de sobre Gerald. Así que podemos traducir el enunciado 30 como $\exists y \exists x(Dx \,\&\, Oyx)$.

El enunciado 31 puede parafrasearse como 'Cada uno de los amigos de Gerald es dueño de un perro'. Al traducir parte de este enunciado, obtenemos $\forall x(Fxg \rightarrow$ 'x es dueño de un perro'). De nuevo, es importante darse cuenta de que 'x es dueño de un perro' es estructuralmente como el enunciado 29. Dado que ya tenemos un cuantificador-x, necesitaremos una variable diferente para el cuantificador existencial. Cualquier otra variable servirá. Usando z, el enunciado 31 puede traducirse como $\forall x\big[Fxg \rightarrow \exists z(Dz \,\&\, Oxz)\big]$.

El enunciado 32 puede parafrasearse como 'Para cualquier x que sea dueño de un perro, hay un dueño de un perro que es amigo de x'. Parcialmente traducido, se convierte en

$$\forall x\big[x \text{ es dueño de un perro} \rightarrow \exists y(y \text{ es dueño de un perro} \,\&\, Fxy)\big].$$

Completando la traducción, el enunciado 32 se convierte en

$$\forall x\big[\exists z(Dz \,\&\, Oxz) \rightarrow \exists y\big(\exists z(Dz \,\&\, Oyz) \,\&\, Fxy\big)\big].$$

Observa esta clave de simbolización y estos enunciados:

UD: personas
Lxy: a x le gusta y.
i: Imre
k: Karl

33. A Imre le gustan todos los que le gustan a Karl.
34. Hay alguien a quien le gustan todos aquellos a quienes les gustan todos aquellos que le gustan a él.

El enunciado 33 puede ser traducido parcialmente como $\forall x$(A Karl le gusta $x \rightarrow$ A Imre le gusta x). Esto es $\forall x(Lkx \rightarrow Lix)$.

El enunciado 34 es casi un trabalenguas. No podemos pretender escribir toda la traducción inmediatamente, pero podemos ir dando pequeños pasos. Una traducción inicial y parcial podría ser así:

$\exists x$ todos aquellos a quienes les gustan todos aquellos que le gustan a x son gustados por x.

La parte que falta en español es un enunciado universal, así que seguimos traduciendo:

$\exists x \forall y$(a y le gustan todos aquellos que le gustan a $x \rightarrow$ a x le gusta y).

La estructura del antecedente del condicional es como la del enunciado 33, con y y x en lugar de Imre y Karl. Así que el enunciado 34 puede traducirse completamente de esta manera:

$$\exists x \forall y \big[\forall z(Lxz \rightarrow Lyz) \rightarrow Lxy\big]$$

Al simbolizar enunciados con múltiples cuantificadores, lo mejor es avanzar con pequeños pasos. Parafrasea el enunciado en español de manera que la estructura lógica esté preparada para ser simbolizada en LC. Después traduce poco a poco, sustituyendo la abrumadora tarea de traducir un largo enunciado por la tarea más simple de traducir fórmulas más cortas.

4.5. Enunciados en LC

En esta sección proporcionamos una definición formal de *fórmula bien formada* (fbf) y de *enunciado* de la LC.

Expresiones

Hay seis tipos de símbolos en la LC:

predicados con subíndices, según necesidad	$A, B, C, \ldots, Z$ $A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$
constantes con subíndices, según necesidad	$a, b, c, \ldots, w$ $a_1, w_4, h_7, m_{32}, \ldots$
variables con subíndices, según necesidad	x, y, z $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$
conectivas	$\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
paréntesis	(,)
cuantificadores	$\forall, \exists$

Definimos EXPRESIÓN DE LA LC como cualquier cadena de símbolos de la LC. Toma cualesquiera símbolos de la LC y escríbelos, en cualquier orden, y ya tienes una expresión.

Fórmulas bien formadas

Por definición, un TÉRMINO DE LA LC es o una constante o una variable.

Una FÓRMULA ATÓMICA DE LA LC es un predicado n-ario seguido de n términos.

Al igual que hicimos para la LE, daremos una definición *recursiva* de fbf en la LC. De hecho, la mayor parte de la definición será igual a la definición de fbf en la LE: todo enunciado atómico es una fbf, y se pueden construir nuevas fbfs aplicando las conectivas de enunciados.

Podríamos añadir simplemente una regla para cada uno de los cuantificadores y dejarlo así. Por ejemplo: si $\mathcal{A}$ es una fbf, entonces $\forall x\mathcal{A}$ y $\exists x\mathcal{A}$ son fbfs. Sin embargo, esto permitiría que hubiera enunciados extraños como $\forall x\exists xDx$ y $\forall xDw$. ¿Qué podrían significar? Podríamos adoptar alguna interpretación de tales enunciados, pero en lugar de ellos escribiremos la definición de fbf de modo que tales abominaciones ni siquiera cuenten como bien formadas.

Para que $\forall x\mathcal{A}$ sea una fbf, $\mathcal{A}$ debe contener la variable x y no debe contener ya un cuantificador-x. $\forall xDw$ no contará como fbf porque 'x' no aparece en Dw, y $\forall x\exists xDx$ no contará como fbf porque $\exists xDx$ contiene un cuantificador-x.

1. Toda fórmula atómica es una fbf.
2. Si $\mathcal{A}$ es una fbf, entonces $\neg\mathcal{A}$ es una fbf.
3. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B})$ es una fbf.
4. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ es una fbf.
5. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B})$ es una fbf.
6. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbfs, entonces $(\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B})$ es una fbf.
7. Si $\mathcal{A}$ es una fbf, χ es una variable, $\mathcal{A}$ contiene al menos una ocurrencia de χ, y $\mathcal{A}$ no contiene cuantificadores-χ, entonces $\forall\chi\mathcal{A}$ es una fbf.
8. Si $\mathcal{A}$ es una fbf, χ es una variable, $\mathcal{A}$ contiene al menos una ocurrencia de χ, y $\mathcal{A}$ no contiene cuantificadores-χ, entonces $\exists\chi\mathcal{A}$ es una fbf.
9. Todas las fbfs de la LC y solo ellas pueden ser generadas por aplicaciones de estas reglas.

Date cuenta de que el 'χ' que aparece en la anterior definición no es la variable x. Es una *metavariable* que representa cualquier variable de la LC. Así que $\forall x Ax$ es una fbf, pero también lo son $\forall y Ay$, $\forall z Az$, $\forall x_4 Ax_4$, y $\forall z_9 Az_9$.

Ahora podemos dar una definición formal del rango: el RANGO de un cuantificador es la subfórmula en la que el cuantificador es el operador lógico principal.

Enunciados

Un enunciado es algo que puede ser verdadero o falso. En la LE, toda fbf era un enunciado. Esto no será así en la LC. Observa la siguiente clave de simbolización:

UD: personas
Lxy: x ama a y.
b: Boris

Piensa en la expresión Lzz. Es una fórmula atómica: un predicado binario seguido de dos términos. Todas las fórmulas atómicas son fbfs, así que Lzz es una fbf. ¿Significa algo? Puede que pienses que significa que z se ama a sí mismo, de la misma forma que *Lbb* significa que Boris se ama a sí mismo. Pero z es una variable; no nombra a una persona de la misma forma que lo haría una constante. La fbf Lzz no nos dice cómo interpretar z. ¿Significa todos? ¿Cualquiera? ¿Alguno? Si tuviéramos un cuantificador-z, nos diría cómo interpretar z. Por ejemplo, $\exists z Lzz$ significaría que alguien se ama a sí mismo.

Algunos lenguajes formales tratan a las fbfs como Lzz como si implícitamente tuvieran un cuantificador universal delante. No haremos esto para la LC. Si quieres decir que todos se aman a sí mismos, entonces tienes que escribir el cuantificador: $\forall z Lzz$

Para que una variable tenga sentido necesitamos que un cuantificador nos diga cómo interpretarla. El rango de un cuantificador-x, por ejemplo, es la parte de la fórmula en la que el cuantificador nos dice cómo interpretar x.

Para ser precisos con esto, definimos una VARIABLE LIGADA como una ocurrencia de una variable χ que está dentro del rango de un cuantificador-χ. Una VARIABLE LIBRE es una ocurrencia de una variable que no está ligada.

Por ejemplo, observa la fbf $\forall x(Ex \vee Dy) \rightarrow \exists z(Ex \rightarrow Lzx)$. El rango del cuantificador universal $\forall x$ es $(Ex \vee Dy)$, así que la primera x está ligada por el cuantificador universal pero la segunda y la tercera x están libres. No hay ningún cuantificador-y, así que la y está libre. El rango del cuantificador existencial $\exists z$ es $(Ex \rightarrow Lzx)$, así que la ocurrencia de z está ligada por él.

Definimos un ENUNCIADO de la LC como una fbf de la LC que no contiene ninguna variable libre.

Convenciones de notación

Adoptaremos las mismas convenciones de notación que adoptamos para la LE (p. 32.) En primer lugar, podemos omitir los paréntesis exteriores de una fórmula. En segundo lugar, usaremos los corchetes '[' y ']' en lugar de los paréntesis para que las fórmulas sean más legibles. En tercer lugar, omitiremos los paréntesis entre cada par de términos cuando escribamos series largas de conjunciones. En cuarto lugar, omitiremos los paréntesis entre cada par de términos cuando escribamos series largas de disyunciones.

4.6. Identidad

Observa este enunciado:

35. Pavel debe dinero a todos los demás.

Hagamos que el UD sean personas; esto nos permitirá traducir 'todos' como un cuantificador universal. Hagamos que Oxy signifique 'x debe dinero a y', y que p signifique Pavel. Ahora podemos simbolizar el enunciado 35 como $\forall x Opx$. Por desgracia, esta traducción tiene algunas consecuencias raras. Dice que Pavel debe dinero a cada uno de los miembros del UD, incluido Pavel; eso implica que Pavel se debe dinero a sí mismo. Sin embargo, el enunciado 35 no dice que Pavel se debe dinero a sí mismo, sino que debe dinero a todos *los demás*. Esto es un problema, porque $\forall x Opx$ es la mejor traducción de este enunciado a la LC que podemos dar.

La solución es añadir otro símbolo a la LC. El símbolo '$=$' es un predicado binario. Dado que tiene un significado lógico especial, lo escribimos de manera un poco diferente: para dos términos t_1 y t_2, $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica.

El predicado $x = y$ significa 'x es idéntico a y'. Esto no significa simplemente que x e y sean indistinguibles o que todos los mismos predicados sean verdaderos para ellos. Significa más bien que x e y son exactamente la misma cosa.

Cuando escribimos $x \neq y$, queremos decir que x e y no son idénticos. No hay razón para introducir esto como un predicado adicional. En lugar de ello, $x \neq y$ es una abreviatura de $\neg(x = y)$.

Ahora supón que queremos simbolizar este enunciado:

36. Pavel es Mister Checkov.

Hagamos que la constante c signifique Mister Checkov. El enunciado 36 puede simbolizarse como $p = c$. Esto significa que las constantes p y c se refieren a la misma persona.

Todo esto está muy bien, pero ¿cómo nos ayuda con el enunciado 35? Ese enunciado puede parafrasearse como 'A todos los que no son Pavel les debe dinero Pavel'. Esta es una estructura de enunciado que ya sabemos cómo simbolizar: 'Para todo x, si x no es Pavel, entonces a x le debe dinero Pavel'. En la LC con identidad, esto se convierte en $\forall x(x \neq p \rightarrow Opx)$.

Además de los enunciados donde se use la expresión 'los demás', la identidad será útil al simbolizar algunos enunciados que contengan las expresiones 'aparte de' y 'solo'. Observa estos ejemplos:

37. Nadie aparte de Pavel debe dinero a Hikaru.
38. Solo Pavel debe dinero a Hikaru.

Añadimos la constante h, que significa Hikaru.

El enunciado 37 puede parafrasearse como 'Nadie que no sea Pavel debe dinero a Hikaru'. Esto puede traducirse como $\neg\exists x(x \neq p \,\&\, Oxh)$.

El enunciado 38 puede parafrasearse como 'Pavel debe dinero a Hikaru *y* nadie aparte de Pavel debe dinero a Hikaru'. Ya hemos traducido uno de los términos de la conjunción, y el otro es fácil. El enunciado 38 se convierte en $Oph \,\&\, \neg\exists x(x \neq p \,\&\, Oxh)$.

Expresiones de cantidad

También podemos usar la identidad para decir cuántas cosas hay de un tipo determinado. Por ejemplo, observa estos enunciados:

39. Hay al menos una manzana sobre la mesa.
40. Hay al menos dos manzanas sobre la mesa.
41. Hay al menos tres manzanas sobre la mesa.

Hagamos que el UD sea *cosas sobre la mesa*, y que Ax signifique 'x es una manzana'.

El enunciado 39 no requiere la identidad. Puede traducirse adecuadamente como $\exists x Ax$: hay alguna manzana sobre la mesa —tal vez muchas, pero al menos una.

Puede resultar tentador traducir también el enunciado 40 sin identidad. Pero piensa en el enunciado $\exists x \exists y(Ax \,\&\, Ay)$. Significa que hay alguna manzana x en el UD y alguna manzana y en el UD. Dado que nada impide que x e y seleccionen el mismo miembro del UD, esto sería verdadero incluso si hubiera solo una manzana. Para asegurarnos de que hay dos manzanas *diferentes*, necesitamos un predicado de identidad. El enunciado 40 tiene que decir que las dos manzanas que existen no son idénticas, así que puede traducirse como $\exists x \exists y(Ax \,\&\, Ay \,\&\, x \neq y)$.

El enunciado 41 requiere hablar sobre tres manzanas diferentes. Puede traducirse como $\exists x \exists y \exists z(Ax \,\&\, Ay \,\&\, Az \,\&\, x \neq y \,\&\, y \neq z \,\&\, x \neq z)$.

Siguiendo de esta manera, podríamos traducir 'Hay al menos n manzanas sobre la mesa'. Hay un resumen de cómo simbolizar enunciados como estos en la p. 164.

Ahora observa estos enunciados:

42. Hay como mucho una manzana sobre la mesa.
43. Hay como mucho dos manzanas sobre la mesa.

El enunciado 42 puede parafrasearse como 'No se da el caso de que haya al menos *dos* manzanas sobre la mesa'. Esto es justamente la negación del enunciado 40:

$$\neg \exists x \exists y(Ax \,\&\, Ay \,\&\, x \neq y)$$

Pero el enunciado 42 también puede enfocarse de otra manera. Significa que todas las manzanas que haya sobre la mesa deben ser la misma manzana, así que puede traducirse como $\forall x \forall y\big[(Ax \,\&\, Ay) \to x = y\big]$. Las dos traducciones son lógicamente equivalentes, así que ambas son correctas.

De manera similar, el enunciado 43 puede traducirse de dos formas equivalentes. Puede parafrasearse como 'No se da el caso de que haya *tres* o más manzanas diferentes', así que puede traducirse como la negación del enunciado 41. Usando cuantificadores universales, también puede traducirse como

$$\forall x \forall y \forall z\big[(Ax \,\&\, Ay \,\&\, Az) \to (x = y \lor x = z \lor y = z)\big].$$

Puedes ver el caso general en la p. 164.

Los ejemplos anteriores son enunciados sobre manzanas, pero la estructura lógica de los enunciados traduce desigualdades matemáticas como $a \geq 3$, $a \leq 2$, y así sucesivamente. También queremos poder traducir afirmaciones de igualdad que digan exactamente cuántas cosas hay. Por ejemplo:

44. Hay exactamente una manzana sobre la mesa.
45. Hay exactamente dos manzanas sobre la mesa.

El enunciado 44 puede parafrasearse como 'Hay *al menos* una manzana sobre la mesa, y hay *como mucho* una manzana sobre la mesa'. Esto es simplemente la conjunción del enunciado 39 y el enunciado 42: $\exists x Ax \,\&\, \forall x \forall y \big[(Ax \,\&\, Ay) \to x = y\big]$. Esta es una manera un poco complicada de hacerlo. Quizá sea más sencillo parafrasear el enunciado 44 como 'Hay una cosa que es la única manzana sobre la mesa'. Pensado de esta forma, el enunciado puede traducirse como $\exists x\big[Ax \,\&\, \neg\exists y(Ay \,\&\, x \neq y)\big]$.

Igualmente, el enunciado 45 puede parafrasearse como 'Hay dos manzanas diferentes sobre la mesa, y estas son las únicas manzanas sobre la mesa'. Esto puede traducirse como $\exists x \exists y\big[Ax \,\&\, Ay \,\&\, x \neq y \,\&\, \neg\exists z(Az \,\&\, x \neq z \,\&\, y \neq z)\big]$.

Finalmente, observa este enunciado:

46. Hay como mucho dos cosas sobre la mesa.

Puede ser tentador añadir un predicado de manera que Tx significaría 'x es una cosa sobre la mesa'. Sin embargo, eso es innecesario. Dado que el UD es el conjunto de cosas sobre la mesa, todos los miembros del UD están sobre la mesa. Si queremos hablar sobre una *cosa sobre la mesa*, solo necesitamos usar un cuantificador. El enunciado 46 puede simbolizarse como el enunciado 43 (que decía que había como mucho dos manzanas) pero omitiendo completamente el predicado. Es decir, el enunciado 46 puede traducirse como $\forall x \forall y \forall z(x = y \vee x = z \vee y = z)$.

Las técnicas para simbolizar expresiones de cantidad ('como mucho', 'al menos' y 'exactamente') se resumen en la p. 164.

Descripciones definidas

Recuerda que una constante de la LC debe referirse a algún miembro del UD. Esta restricción nos permite evitar el problema de los términos no referenciales. Si tuviéramos un UD que incluyera solo criaturas que existan realmente pero una constante c que significase 'quimera' (una criatura mítica), los enunciados que contuvieran c serían imposibles de evaluar.

La solución más influyente a este problema fue propuesta por Bertrand Russell en 1905. Russell se preguntó cómo deberíamos entender este enunciado:

47. El actual rey de Francia es calvo.

La expresión 'el actual rey de Francia' debería seleccionar a un individuo por medio de una descripción definida. Sin embargo, no había ningún rey de Francia en 1905 y tampoco hay ninguno ahora. Dado que la descripción es un término no referencial, no podemos simplemente definir una constante que signifique 'el actual rey de Francia' y traducir el enunciado como Kf.

La idea de Russell era que los enunciados que contienen descripciones definidas tienen una estructura lógica diferente de la de los enunciados que contienen nombres propios, aunque compartan la misma forma gramatical. ¿Qué queremos decir cuando usamos una descripción referencial no problemática como 'el pico más alto del estado de Washington'? Queremos decir que existe tal pico, porque de lo contrario no podríamos hablar sobre él. También queremos decir que es el único pico de ese tipo. Si hubiera otro pico en el estado de Washington de exactamente la misma altura que el Monte Rainier, entonces el Monte Rainier no sería *el* pico más alto.

De acuerdo con este análisis, el enunciado 47 dice tres cosas. Primero, hace una afirmación de *existencia*: hay algún actual rey de Francia. Segundo, hace una afirmación de *unicidad*: este hombre es el único rey de Francia actual. Tercero, hace una afirmación de *predicación*: este hombre es calvo.

Para simbolizar las descripciones definidas de esta forma, necesitamos el predicado de identidad. Sin él no podríamos traducir la afirmación de unicidad que (de acuerdo con Russell) está implícita en la descripción definida.

Hagamos que el UD sea *personas vivas*, que Fx signifique 'x es el actual rey de Francia', y que Bx signifique 'x es calvo'. El enunciado 47 puede traducirse entonces como $\exists x\big[Fx \,\&\, \neg\exists y(Fy \,\&\, x \neq y) \,\&\, Bx\big]$. Esto dice que hay alguien que es el actual rey de Francia, él es el único actual rey de Francia, y es calvo.

Entendido de esta manera, el enunciado 47 tiene significado pero es falso. Dice que ese hombre existe, pero en realidad no existe.

El problema de los términos no referenciales es más molesto cuando intentamos traducir negaciones. Así que observa este enunciado:

48. El actual rey de Francia no es calvo.

Según Russell, este enunciado es ambiguo. Puede significar una de dos cosas:

48a. No se da el caso de que el actual rey de Francia sea calvo.
48b. El actual rey de Francia es no-calvo.

Los dos posibles significados niegan el enunciado 47, pero ponen la negación en lugares diferentes.

El enunciado 48a se llama NEGACIÓN EXTERNA porque niega todo el enunciado. Puede traducirse como $\neg\exists x\big[Fx \,\&\, \neg\exists y(Fy \,\&\, x \neq y) \,\&\, Bx\big]$. Esto no dice nada sobre el actual rey de Francia, sino que más bien dice que un enunciado sobre el actual rey de Francia es falso. Puesto que el enunciado 47 es falso, el enunciado 48a es verdadero.

El enunciado 48b dice algo sobre el actual rey de Francia. Dice que carece de la propiedad de ser calvo. Al igual que el enunciado 47, hace una afirmación de existencia y una afirmación de unicidad; simplemente niega la predicación. Esto se llama NEGACIÓN INTERNA. Puede traducirse como $\exists x\big[Fx \,\&\, \neg\exists y(Fy \,\&\, x \neq y) \,\&\, \neg Bx\big]$. Dado que no hay un actual rey de Francia, este enunciado es falso.

La teoría de las descripciones definidas de Russell soluciona el problema de los términos no referenciales y también explica por qué parecían tan paradójicos. Antes de que distinguiéramos entre las negaciones externas e internas, parecía que enunciados como 48 debían ser tanto verdaderos como falsos. Al mostrar que tales enunciados son ambiguos, Russell mostró que son verdaderos entendidos de una forma pero son falsos entendidos de otra forma.

Para leer una explicación más detallada de la teoría de las descripciones definidas de Russell, incluidas las objeciones a ella, mira la entrada 'descripciones' de Peter Ludlow en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*: edición de verano de 2005, editado por Edward N. Zalta, `http://plato.stanford.edu/archives/sum2005/entries/descriptions/`

Ejercicios

$\star$ **Parte A** Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado español a la LC.

UD: todos los animales
Ax: x es un caimán.
Mx: x es un mono.
Rx: x es un reptil.
Zx: x vive en el zoo.
Lxy: x ama a y.
a: Amos
b: Bouncer
c: Cleo

1. Amos, Bouncer y Cleo viven en el zoo.
2. Bouncer es un reptil, pero no es un caimán.
3. Si Cleo ama a Bouncer, entonces Bouncer es un mono.
4. Si tanto Bouncer como Cleo son caimanes, entonces Amos ama a ambos.
5. Algún reptil vive en el zoo.
6. Todo caimán es un reptil.

7. Todo animal que vive en el zoo es o bien un mono o un caimán.
8. Hay reptiles que no son caimanes.
9. Cleo ama a un reptil.
10. Bouncer ama a todos los monos que viven en el zoo.
11. Todos los monos que ama Amos también le aman a él.
12. Si algún animal es un reptil, entonces Amos lo es.
13. Si algún animal es un caimán, entonces es un reptil.
14. Todos los monos que ama Cleo también son amados por Amos.
15. Hay un mono que Bouncer ama, pero lamentablemente Bouncer no corresponde su amor.

Parte B Estas son figuras silogísticas identificadas por Aristóteles y sus sucesores, junto con sus nombres medievales. Traduce cada argumento a la LC.

Barbara Todos los B son C. Todos los A son B. $\therefore$ Todos los A son C.

Baroco Todos los C son B. Algún A no es B. $\therefore$ Algún A no es C.

Bocardo Algún B no es C. Todos los A son B. $\therefore$ Algún A no es C.

Celantes Ningún B es C. Todos los A son B. $\therefore$ Ningún C es A.

Celarent Ningún B es C. Todos los A son B. $\therefore$ Ningún A es C.

Cemestres Ningún C es B. Ningún A es B. $\therefore$ Ningún A es C.

Cesare Ningún C es B. Todos los A son B. $\therefore$ Ningún A es C.

Dabitis Todos los B son C. Algún A es B. $\therefore$ Algún C es A.

Darii Todos los B son C. Algún A es B. $\therefore$ Algún A es C.

Datisi Todos los B son C. Algún A es B. $\therefore$ Algún A es C.

Disamis Algún B es C. Todos los A son B. $\therefore$ Algún A es C.

Ferison Ningún B es C. Algún A es B. $\therefore$ Algún A no es C.

Ferio Ningún B es C. Algún A es B. $\therefore$ Algún A no es C.

Festino Ningún C es B. Algún A es B. $\therefore$ Algún A no es C.

Baralipton Todos los B son C. Todos los A son B. $\therefore$ Algún C es A.

Frisesomorum Algún B es C. Ningún A es B. $\therefore$ Algún C no es A.

Parte C Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado español a la LC.

UD: todos los animales
Dx: x es un perro.
Sx: a x le gustan las películas de samuráis.
Lxy: x es más grande que y.
b: Bertie
e: Emerson
f: Fergis

1. Bertie es un perro al que le gustan las películas de samuráis.
2. Bertie, Emerson y Fergis son perros.
3. Emerson es más grande que Bertie, y Fergis es más grande que Emerson.
4. A todos los perros les gustan las películas de samuráis.
5. Solo a los perros les gustan las películas de samuráis.
6. Hay un perro que es más grande que Emerson.
7. Si hay un perro más grande que Fergis, entonces hay un perro más grande que Emerson.
8. Ningún animal al que le gusten las películas de samuráis es más grande que Emerson.
9. Ningún perro es más grande que Fergis.
10. Cualquier animal al que no le gusten las películas de samuráis es más grande que Bertie.
11. Hay un animal que está entre Bertie y Emerson por tamaño.
12. No hay ningún perro que esté entre Bertie y Emerson por tamaño.
13. Ningún perro es más grande que sí mismo.
14. Para cada perro, hay algún perro más grande que él.
15. Hay un animal que es más pequeño que cualquier perro.
16. Si hay un animal que es más grande que cualquier perro, entonces a ese animal no le gustan las películas de samuráis.

Parte D Para cada argumento, escribe una clave de simbolización y traduce el argumento a la LC.

1. No hay nada sobre mi escritorio que pase desapercibido para mí. Hay un ordenador sobre mi escritorio. Por tanto, hay un ordenador que no pasa desapercibido para mí.
2. Todos mis sueños son en blanco y negro. Los programas de televisión viejos son en blanco y negro. Por lo tanto, algunos de mis sueños son programas de televisión viejos.
3. Ni Holmes ni Watson han estado en Australia. Una persona solo podía ver un canguro si había estado en Australia o en un zoo. Aunque Watson no ha visto un canguro, Holmes lo ha visto. Por lo tanto, Holmes ha estado en un zoo.

4. Nadie se espera la Inquisición Española. Nadie conoce las dificultades que yo he visto. Por lo tanto, cualquiera que se espere la Inquisición Española conoce las dificultades que yo he visto.
5. Un antílope es más grande que una panera. Estoy pensando en algo que no es más grande que una panera, y es o un antílope o un melón. Por tanto, estoy pensando en un melón.
6. Todos los bebés son ilógicos. Nadie que sea ilógico puede manejar un cocodrilo. Berthold es un bebé. Por lo tanto, Berthold es incapaz de manejar un cocodrilo.

$\star$ **Parte E** Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado español a la LC.

UD: dulces
Cx: x tiene chocolate.
Mx: x tiene mazapán.
Sx: x tiene azúcar.
Tx: Boris ha probado x.
Bxy: x es mejor que y.

1. Boris nunca ha probado un dulce.
2. El mazapán siempre se hace con azúcar.
3. Algunos dulces no tienen azúcar.
4. El mejor dulce de todos es el chocolate.
5. Ningún dulce es mejor que sí mismo.
6. Boris nunca ha probado el chocolate sin azúcar.
7. Boris ha probado el mazapán y el chocolate, pero nunca juntos.
8. Cualquier dulce con chocolate es mejor que cualquier dulce sin él.
9. Cualquier dulce con chocolate y mazapán es mejor que cualquier dulce que carezca de ambos.

Parte F Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado español a la LC.

UD: personas y comida
Rx: x se ha terminado.
Tx: x está en la mesa.
Fx: x es comida.
Px: x es una persona.
Lxy: a x le gusta y.
e: Eli
f: Francesca
g: guacamole

1. Toda la comida está en la mesa.
2. Si no se ha terminado el guacamole, entonces está en la mesa.
3. A todos les gusta el guacamole.
4. Si a alguien le gusta el guacamole, entonces a Eli le gusta.
5. A Francesca solo le gusta la comida que se ha terminado.
6. A Francesca no le gusta nadie, y a nadie le gusta Francesca.
7. A Eli le gustan todos aquellos a quienes les gusta el guacamole.
8. A Eli le gustan todos aquellos a quienes les gustan las personas que le gustan a él.
9. Si ya hay una persona en la mesa, entonces toda la comida debe de haberse terminado.

⋆ **Parte G** Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado español a la LC.

UD: personas
Dx: x baila ballet.
Fx: x es mujer.
Mx: x es varón.
Cxy: x es hijo/a de y.
Sxy: x es hermano/a de y.
e: Elmer
j: Jane
p: Patrick

1. Todos los hijos de Patrick son bailarines de ballet.
2. Jane es hija de Patrick.
3. Patrick tiene una hija.
4. Jane es hija única.
5. Todas las hijas de Patrick bailan ballet.
6. Patrick no tiene hijos varones.
7. Jane es la sobrina de Elmer.
8. Patrick es el hermano de Elmer.
9. Los hermanos varones de Patrick no tienen ni hijos ni hijas.
10. Jane es tía.
11. Todo aquel que baila ballet tiene una hermana que también baila ballet.
12. Todo hombre que baila ballet es hijo de alguien que baila ballet.

Parte H Identifica las variables que están ligadas y las que están libres.

1. $\exists x Lxy \,\&\, \forall y Lyx$
2. $\forall x Ax \,\&\, Bx$
3. $\forall x(Ax \,\&\, Bx) \,\&\, \forall y(Cx \,\&\, Dy)$
4. $\forall x \exists y[Rxy \to (Jz \,\&\, Kx)] \vee Ryx$

5. $\forall x_1(Mx_2 \leftrightarrow Lx_2x_1) \,\&\, \exists x_2 Lx_3x_2$

⋆ Parte I

1. Identifica los casos de sustitución de $\forall x Rcx$ entre los siguientes: Rac, Rca, Raa, Rcb, Rbc, Rcc, Rcd, Rcx.
2. Identifica los casos de sustitución de $\exists x \forall y Lxy$ entre los siguientes: $\forall y Lby$, $\forall x Lbx$, Lab, $\exists x Lxa$.

Parte J Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado del español a la LC con identidad. El último enunciado es ambiguo y puede ser traducido de dos formas; debes proporcionar las dos traducciones. (Pista: solo se requiere la identidad para los últimos cuatro enunciados.)

UD: personas
Kx: x conoce la combinación de la caja fuerte.
Sx: x es un espía.
Vx: x es vegetariano.
Txy: x confía en y.
h: Hofthor
i: Ingmar

1. Hofthor es un espía, pero ningún vegetariano es un espía.
2. Nadie conoce la combinación de la caja fuerte a menos que la conozca Ingmar.
3. Ningún espía conoce la combinación de la caja fuerte.
4. Ni Hofthor ni Ingmar son vegetarianos.
5. Hofthor confía en un vegetariano.
6. Todos los que confían en Ingmar confían en un vegetariano.
7. Todos los que confían en Ingmar confían en alguien que confía en un vegetariano.
8. Solo Ingmar conoce la combinación de la caja fuerte.
9. Ingmar confía en Hofthor, pero en nadie más.
10. La persona que conoce la combinación de la caja fuerte es vegetariana.
11. La persona que conoce la combinación de la caja fuerte no es un espía.

⋆ Parte K Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado del español a la LC con identidad. Los últimos dos enunciados son ambiguos y pueden ser traducidos de dos formas; debes proporcionar las dos traducciones de ambos.

UD: cartas en una baraja inglesa.
Bx: x es negra.

Cx: x es de tréboles.
Dx: x es un dos.
Jx: x es una jota.
Mx: x es un hombre con un hacha.
Ox: x está de perfil.
Wx: x es un comodín.

1. Todos los tréboles son negros.
2. No hay comodines.
3. Hay al menos dos tréboles.
4. Hay más de una jota de perfil.
5. Hay como mucho dos jotas de perfil.
6. Hay dos jotas negras.
7. Hay cuatro doses.
8. El dos de tréboles es una carta negra.
9. Las jotas de perfil y el hombre con el hacha son comodines.
10. Si el dos de tréboles es un comodín, entonces hay exactamente un comodín.
11. El hombre con el hacha no es una jota.
12. El dos de tréboles no es el hombre con el hacha.

Parte L Usando la clave de simbolización dada, traduce cada enunciado del español a la LC con identidad. Los últimos dos enunciados son ambiguos y pueden ser traducidos de dos formas; debes proporcionar las dos traducciones de ambos.

UD: animales del mundo
Bx: x está en la granja Brown.
Hx: x es un caballo.
Px: x es un pegaso.
Wx: x tiene alas.

1. Hay al menos tres caballos en el mundo.
2. Hay al menos tres animales en el mundo.
3. Hay más de un caballo en la granja Brown.
4. Hay tres caballos en la granja Brown.
5. Hay una única criatura con alas en la granja Brown; todas las demás criaturas de la granja deben carecer de alas.
6. El pegaso es un caballo con alas.
7. El animal de la granja Brown no es un caballo.
8. El caballo de la granja Brown no tiene alas.

Capítulo 5

Semántica formal

En este capítulo describimos una *semántica formal* para la LE y la LC. La palabra 'semántica' viene de la palabra griega para 'signo' y significa 'relacionado con el significado'. Así que una semántica formal será una explicación matemática del significado en el lenguaje formal.

Un lenguaje lógico formal está formado por dos tipos de elementos: símbolos lógicos y símbolos no lógicos. Las conectivas (como '&') y los cuantificadores (como '$\forall$') son símbolos lógicos, porque su significado está especificado en el lenguaje formal. Al escribir una clave de simbolización no se te permite cambiar el significado de los símbolos lógicos. No puedes decir, por ejemplo, que el símbolo '$\neg$' significará 'no' en un argumento y 'quizá' en otro. El símbolo '$\neg$' siempre significa la negación lógica. Se usa para traducir la palabra española 'no', pero es un símbolo de un lenguaje formal y se define por sus condiciones de verdad.

Las letras de enunciado en la LE son símbolos no lógicos, porque su significado no está definido por la estructura lógica de la LE. Cuando traducimos un argumento del español a la LE, por ejemplo, la letra de enunciado M no tiene su significado fijado de antemano; proporcionamos una clave de simbolización que dice cómo debe interpretarse M en ese argumento. En la LC, los predicados y las constantes son símbolos no lógicos.

Al traducir del español a un lenguaje formal, proporcionábamos claves de simbolización que eran interpretaciones de todos los símbolos no lógicos que usábamos en la traducción. Una INTERPRETACIÓN da un significado a todos los elementos no lógicos del lenguaje.

Es posible proporcionar diferentes interpretaciones y ello no tiene consecuencias formales. En la LE, por ejemplo, podemos decir que D significa 'Hoy es martes', o en lugar de ello podemos decir que D significa 'Hoy es el día siguiente al lunes'.

Estas son dos interpretaciones diferentes, porque usan diferentes enunciados del español para el significado de D. Sin embargo, formalmente, no hay diferencia entre ellas. Lo único que importa cuando hemos simbolizado estos enunciados es si son verdaderos o falsos. Para caracterizar lo que marca la diferencia en el lenguaje formal, tenemos que saber qué hace que los enunciados sean verdaderos o falsos. Para esto, necesitamos una caracterización formal de la *verdad*.

Cuando dimos las definiciones de enunciado de la LE y de enunciado de la LC, distinguimos entre el LENGUAJE OBJETO y el METALENGUAJE. El lenguaje objeto es el lenguaje *sobre el que estamos hablando*: LE o LC. El metalenguaje es el lenguaje que usamos para hablar sobre el lenguaje objeto: español, complementado con algo de argot matemático. Será importante tener en mente esta distinción.

5.1. Semántica de la LE

En esta sección se proporciona una caracterización formal rigurosa de *verdad en la LE* que se apoya en lo que ya sabemos de tablas de verdad. Podíamos usar tablas de verdad para comprobar con fiabilidad si un enunciado era una tautología en LE, si dos enunciados eran equivalentes, si un argumento era válido, etc. Por ejemplo: $\mathcal{A}$ es una tautología en LE si es V en cada una de las líneas de una tabla de verdad completa.

Esto funcionaba porque cada una de las líneas de una tabla de verdad correspondía a una forma como puede ser el mundo. Considerábamos todas las combinaciones posibles de 1 y 0 para las letras de enunciado que tenían consecuencias en los enunciados que nos interesaban. La tabla de verdad nos permitía determinar qué pasaría si se daban esas diferentes combinaciones.

Una vez que construimos una tabla de verdad, los símbolos '1' y '0' se separan de su significado metalingüístico de 'verdadero' y 'falso'. Interpretamos que '1' significa 'verdadero', pero las propiedades formales de 1 se definen por las tablas de verdad características para las diferentes conectivas. Los símbolos de una tabla de verdad tienen un significado formal que podemos especificar completamente en términos de cómo operan las conectivas. Por ejemplo, si A tiene el valor 1, entonces $\neg A$ tiene el valor 0.

En resumen: la verdad en la LE es simplemente la asignación de un 1 o un 0.

Para definir formalmente la verdad en la LE, por tanto, necesitamos una función que asigne 1 o 0 a cada uno de los enunciados de la LE. Podemos interpretar esta función como una definición de la verdad en la LE si asigna 1 a todos los enunciados verdaderos de la LE y 0 a todos los enunciados falsos de la LE. Llamemos a esta función 'v' (de 'valoración'). Queremos que v sea una función tal que, para cualquier enunciado $\mathcal{A}$, $v(\mathcal{A}) = 1$ si $\mathcal{A}$ es verdadero y $v(\mathcal{A}) = 0$ si $\mathcal{A}$ es falso.

Recuerda que la definición recursiva de fbf en la LE tiene dos etapas: el primer paso decía que los enunciados atómicos (letras de enunciado aisladas) son fbfs. El segundo paso permitía construir fbfs a partir de fbfs más básicas. Había cláusulas de la definición para todas las conectivas de enunciados. Por ejemplo, si $\mathcal{A}$ es una fbf, entonces $\neg\mathcal{A}$ es una fbf.

Nuestra estrategia para definir la función de verdad v también será en dos pasos. El primer paso se ocupará de la verdad de los enunciados atómicos; el segundo paso se ocupará de la verdad de los enunciados compuestos.

La verdad en la LE

¿Cómo podemos definir la verdad para un enunciado atómico de la LE? Piensa, por ejemplo, en el enunciado M. Sin una interpretación no podemos decir si M es verdadero o falso. Podría significar cualquier cosa. Si usamos M para que simbolice 'La luna gira en torno a la Tierra', entonces M es verdadero. Si usamos M para que simbolice 'La luna es una lechuga gigante', entonces M es falso.

Además, la forma de descubrir si M es verdadero o no depende de lo que signifique M. Si M significa 'Es lunes', entonces tendrías que mirar un calendario. Si M significa 'La luna de Júpiter Ío tiene una actividad volcánica significativa', entonces tendrías que mirar un texto de astronomía —y los astrónomos lo saben porque enviaron satélites para observarlo.

Cuando damos una clave de simbolización para la LE, proporcionamos una interpretación de las letras de enunciado que usamos. La clave da un enunciado en español para cada letra de enunciado que usamos. De esta manera, la interpretación especifica lo que cada una de las letras de enunciado *significa*. Sin embargo, esto no es suficiente para determinar si ese enunciado es verdadero. Los enunciados sobre la luna, por ejemplo, requieren que tengas algún conocimiento básico de astronomía. Imagina a una niña pequeña que esté convencida de que la luna es una lechuga gigante. Ella podría comprender lo que significa el enunciado 'La luna es una lechuga gigante', pero creer equivocadamente que es verdadero.

Veamos otro ejemplo: si M significa 'Ahora es la mañana', entonces si es verdadero o no depende de cuándo estés leyendo esto. Yo sé lo que significa el enunciado, pero —dado que no sé cuándo leerás esto— no sé si es verdadero o falso.

Así que una interpretación sola no determina si un enunciado es verdadero o falso. La verdad o falsedad depende también de cómo sea el mundo. Si M

significara 'La luna es una lechuga gigante' y la luna real fuese una lechuga gigante, entonces M sería verdadero. Para decirlo de manera general, la verdad o falsedad está determinada por una interpretación *más* una forma como el mundo es.

$$\text{INTERPRETACIÓN} + \text{ESTADO DEL MUNDO} \Longrightarrow \text{VERDAD/FALSEDAD}$$

Al proporcionar una definición lógica de la verdad, no podremos dar una explicación de cómo un enunciado atómico se hace verdadero o falso por el mundo. En lugar de ello, presentaremos una *asignación de valores de verdad*. Formalmente, esto será una función que nos diga el valor de verdad de todos los enunciados atómicos. Llamemos a esta función 'a' (de 'asignación). Definimos a para todas las letras de enunciado $\mathcal{P}$ tal que

$$a(\mathcal{P}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P} \text{ es verdadero,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esto significa que a toma cualquier enunciado de la LE y le asigna un uno o un cero; un uno si el enunciado es verdadero, un cero si el enunciado es falso. Los detalles de la función a están determinados por el significado de las letras de enunciado junto con el estado del mundo. Si D significa 'Está oscuro fuera', entonces $a(D) = 1$ por la noche o durante una fuerte tormenta, mientras que $a(D) = 0$ en un día despejado.

Puedes pensar en a como si fuera una fila en una tabla de verdad. Mientras que una fila de una tabla de verdad asigna un valor de verdad a unos pocos enunciados atómicos, la asignación de valores de verdad asigna un valor a todos los enunciados atómicos de la LE. Hay infinitas letras de enunciado, y la asignación de valores de verdad da un valor a cada una de ellas. Al construir una tabla de verdad, solo nos preocupan las letras de enunciado que afectan al valor de verdad de los enunciados que nos interesan. Por eso, ignoramos el resto. Estrictamente hablando, cada una de las filas de una tabla de verdad da una asignación de valores de verdad *parcial*.

Es importante señalar que la asignación de valores de verdad, a, no forma parte del lenguaje de la LE. Forma parte del aparato matemático que usamos para describir la LE. Codifica qué enunciados atómicos son verdaderos y cuáles son falsos.

Definimos ahora la función de verdad, v, usando la misma estructura recursiva que usamos para definir una fbf de la LE.

1. Si $\mathcal{A}$ es una letra de enunciado, entonces $v(\mathcal{A}) = a(\mathcal{A})$.
2. Si $\mathcal{A}$ es $\neg\mathcal{B}$ para algún enunciado $\mathcal{B}$, entonces
$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(\mathcal{B}) = 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

3. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B}\,\&\,\mathcal{C})$ para algunos enunciados $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(\mathcal{B}) = 1 \text{ y } v(\mathcal{C}) = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Puede que parezca que esta definición es circular, porque usa la palabra 'y' al intentar definir 'y'. Sin embargo, date cuenta de que esta no es una definición de la palabra española 'y'; es una definición de la verdad de los enunciados de la LE que contienen el símbolo lógico '&'. Definimos la verdad de los enunciados del lenguaje objeto que contienen el símbolo '&' usando la palabra del metalenguaje 'y'. Eso no tiene nada de circular.

4. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ para algunos enunciados $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(\mathcal{B}) = 0 \text{ y } v(\mathcal{C}) = 0, \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

5. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ para algunos enunciados $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(\mathcal{B}) = 1 \text{ y } v(\mathcal{C}) = 0, \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

6. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$ para algunos enunciados $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(\mathcal{B}) = v(\mathcal{C}), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Dado que la definición de v tiene la misma estructura que la definición de una fbf, sabemos que v asigna un valor a *todas* las fbfs de la LE. Dado que los enunciados de la LE y las fbfs de la LE son lo mismo, eso significa que v nos da el valor de verdad de todos los enunciados de la LE.

La verdad en la LE siempre es la verdad *relativa a* alguna asignación de valores de verdad, porque la definición de verdad para la LE no dice si un enunciado dado es verdadero o falso. Lo que dice es cómo la verdad de ese enunciado se relaciona con una asignación de valores de verdad.

Otros conceptos de la LE

Hemos trabajado con la LE hasta ahora sin dar una definición precisa de 'tautología', 'contradicción', etc. Las tablas de verdad proporcionaban una manera de *comprobar si* un enunciado era una tautología en LE, pero no *definían* lo que significa ser una tautología en LE. Daremos definiciones de estos conceptos para la LE en términos de implicación.

La relación de implicación semántica, '$\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$', significa que no hay ninguna asignación de valores de verdad para la que $\mathcal{A}$ sea verdadero y $\mathcal{B}$ sea falso. Dicho de otra forma, significa que $\mathcal{B}$ es verdadero en todas y cada una de las asignaciones de verdad para las que $\mathcal{A}$ es verdadero.

Abreviamos esto con el símbolo '$\models$': $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ significa '$\mathcal{A}$ implica semánticamente $\mathcal{B}$'.

Podemos hablar de implicación entre más de dos enunciados:

$$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots\} \models \mathcal{B}$$

significa que no hay ninguna asignación de valores de verdad para la que todos los enunciados del conjunto $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots\}$ sean verdaderos y $\mathcal{B}$ sea falso.

También podemos usar el símbolo con un solo enunciado: $\models \mathcal{C}$ significa que $\mathcal{C}$ es verdadero para todas las asignaciones de valores de verdad. Esto es equivalente a decir que el enunciado está implicado por cualquier cosa.

El símbolo de implicación semántica nos permite dar definiciones concisas para varios conceptos de la LE:

> Una TAUTOLOGÍA EN LE es un enunciado $\mathcal{A}$ tal que $\models \mathcal{A}$.
>
> Una CONTRADICCIÓN EN LE es un enunciado $\mathcal{A}$ tal que $\models \neg\mathcal{A}$.
>
> Un enunciado es CONTINGENTE EN LE si y solo si no es ni una tautología ni una contradicción.
>
> Un argumento "$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \therefore\ \mathcal{C}$ " es VÁLIDO EN LE si y solo si $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots\} \models \mathcal{C}$.
>
> Dos enunciados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son LÓGICAMENTE EQUIVALENTES EN LE si y solo si $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \models \mathcal{A}$.

La consistencia lógica es algo más difícil de definir en términos de implicación semántica. En lugar de ello, la definiremos de esta manera:

> El conjunto $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots\}$ es CONSISTENTE EN LE si y solo si hay al menos una asignación de valores de verdad para la que todos los enunciados sean verdaderos. El conjunto es INCONSISTENTE EN LE si y solo si no existe tal asignación.

5.2. Interpretaciones y modelos en la LC

En la LE, una interpretación o clave de simbolización especifica lo que significa cada una de las letras de enunciado. La interpretación de una letra de enunciado junto con el estado del mundo determina si la letra de enunciado es verdadera o falsa. Dado que las unidades básicas son las letras de enunciado, una interpretación solo interesa en la medida en que haga que las letras de enunciado sean verdaderas o falsas. Formalmente, la semántica de la LE es estrictamente en términos de asignaciones de valores de verdad. Dos interpretaciones son la misma, formalmente, si permiten la misma asignación de valores de verdad.

¿Qué es una interpretación en la LC? Como una clave de simbolización para la LC, una interpretación requiere un UD, un significado esquemático para cada uno de los predicados, y un objeto que es seleccionado por cada una de las constantes. Por ejemplo:

UD: personajes de cómic
Fx: x lucha contra el crimen.
b: Batman
w: Bruce Wayne

Piensa en el enunciado Fb. El enunciado es verdadero en esta interpretación, pero —al igual que en la LE— el enunciado no es verdadero *simplemente por* la interpretación. La mayoría de la gente en nuestra cultura sabe que Batman lucha contra el crimen, pero esto requiere un mínimo conocimiento de cómics. El enunciado Fb es verdadero por la interpretación *más* algunos hechos sobre cómics. Esto es especialmente evidente cuando pensamos en Fw. Bruce Wayne es la identidad secreta de Batman en los cómics —la identidad que afirma que $b = w$ es verdadero— así que Fw es verdadero. Sin embargo, dado que es una identidad *secreta*, los otros personajes no saben que Fw es verdadero aunque sepan que Fb es verdadero.

Podemos intentar caracterizar esto como una asignación de valores de verdad, como hicimos para la LE. La asignación de valores de verdad asignaría 0 o 1 a cada fbf atómica: Fb, Fw, etc. Sin embargo, si hiciéramos eso, podríamos simplemente traducir los enunciados de LC a LE sustituyendo Fb y Fw por letras de enunciado. Entonces podríamos apoyarnos en la definición de la verdad para la LE, pero a costa de ignorar toda la estructura lógica de predicados y términos. Al escribir una clave de simbolización para la LC, no damos definiciones separadas para Fb y Fw. En lugar de ello, damos significados a F, b y w. Esto es esencial porque queremos poder usar cuantificadores. No existe una forma adecuada de traducir $\forall xFx$ a LE.

Así que buscamos una contrapartida formal de una interpretación de predicados y constantes, no solo de enunciados. No podemos usar una asignación de valores de verdad para esto, porque un predicado no es ni verdadero ni falso. En la interpretación anteior, F es verdadero *de* Batman (es decir, Fb es verdadero), pero no tiene ningún sentido preguntarse si F es verdadero por sí mismo. Sería como preguntarse si el fragmento de la lengua española '...lucha contra el crimen' es verdadero.

¿Qué hace una interpretación para un predicado, si no hace que sea verdadero o falso? Una interpretación ayuda a seleccionar los objetos a los que se aplica el predicado. La interpretación de que Fx significa 'x lucha contra el crimen' selecciona a Batman, Superman, Spiderman y otros héroes, como las cosas que son F. Formalmente, este es el conjunto de miembros del UD para los que se aplica el predicado; este conjunto se llama EXTENSIÓN del predicado.

Muchos predicados tienen extensiones indefinidamente grandes. No sería práctico intentar escribir individualmente los nombres de todos los luchadores contra el crimen de los cómics, así que en lugar de ello usamos una expresión del lenguaje español para interpretar el predicado. Esto es algo impreciso, porque la interpretación sola no nos dice qué miembros del UD están en la extensión del predicado. Para averiguar si un miembro concreto del UD está en la extensión del predicado (para averiguar si Rayo Negro lucha contra el crimen, por ejemplo), tienes que saber algo sobre cómics. En general, la extensión de un predicado es el resultado de una interpretación *junto con* algunos hechos.

A veces es posible enumerar todas las cosas que forman parte de la extensión de un predicado. En lugar de escribir un enunciado español esquemático, podemos escribir la extensión como un conjunto de cosas. Supón que quisiéramos añadir un predicado unario M a la clave anterior. Queremos que Mx signifique 'x vive en la Mansión Wayne', así que escribimos la extensión como un conjunto de personajes:

$$\text{extensión}(M) = \{\text{Bruce Wayne, Alfred el mayordomo, Dick Grayson}\}$$

No necesitas saber nada sobre cómics para poder determinar que, en esta interpretación, Mw es verdadero: simplemente Bruce Wayne aparece especificado como una de las cosas que son M. Igualmente, $\exists xMx$ obviamente es verdadero en esta interpretación: hay al menos un miembro del UD que es un M —de hecho, hay tres.

¿Y qué pasa con el enunciado $\forall xMx$? El enunciado es falso, porque no es cierto que todos los miembros del UD sean M. El conocimiento más básico sobre cómics es suficiente para saber que hay otros personajes aparte de esos tres. Aunque especificamos la extensión de M de una manera formalmente precisa, también especificamos el UD con una descripción en español. Formalmente hablando, un UD es simplemente un conjunto de miembros.

El significado formal de un predicado se determina por su extensión, pero ¿qué podemos decir de constantes como b y w? El significado de una constante determina qué miembro del UD es seleccionado por la constante. El individuo que la constante selecciona se llama REFERENTE de la constante. Tanto b como w tienen el mismo referente, ya que ambos se refieren al mismo personaje de cómic. Puedes pensar en una constante como un nombre, y en el referente como la cosa nombrada. En español, podemos usar los diferentes nombres 'Batman' y 'Bruce Wayne' para referirnos al mismo personaje de cómic. En esta interpretación, podemos usar las diferentes constantes 'b' y 'w' para referirnos al mismo miembro del UD.

Conjuntos

Usamos las llaves '{' y '}' para denotar conjuntos. Los miembros del conjunto pueden enumerarse en cualquier orden, separados por comas. El hecho de que los conjuntos pueden ir en cualquier orden es importante, porque significa que {tal, cual} y {cual, tal} son el mismo conjunto.

Es posible tener un conjunto sin miembros. Esto se llama CONJUNTO VACÍO. El conjunto vacío se escribe a veces como {}, pero normalmente se escribe con el único símbolo $\emptyset$.

Modelos

Como hemos visto, una interpretación en la LC solo es formalmente significativa en la medida en que determina un UD, una extensión para cada predicado, y un referente para cada constante. Llamamos a esta estructura formal un MODELO para la LC:

Para ver cómo funciona esto, observa esta clave de simbolización:

UD: personas que formaban parte de los Tres Chiflados
Hx: x tenía pelo.
f: señor Fine

Si no sabes nada sobre los Tres Chiflados, no podrás decir qué enunciados de la LC son verdaderos en esta interpretación. Quizá solo recuerdes a Larry, Curly y Moe. ¿Es el enunciado Hf verdadero o falso? Depende de cuál de los chiflados sea el señor Fine.

¿Cuál es el modelo que corresponde a esta interpretación? Hubo seis personas que formaron parte de los Tres Chiflados a lo largo de los años, así que el UD tendrá seis miembros: Larry Fine, Moe Howard, Curly Howard, Shemp Howard, Joe Besser, y Curly Joe DeRita. Curly, Joe y Curly Joe fueron los únicos chiflados completamente calvos. El resultado es este modelo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Larry, Curly, Moe, Shemp, Joe, Curly Joe}\} \\ \text{extensión}(H) &= \{\text{Larry, Moe, Shemp}\} \\ \text{referente}(f) &= \text{Larry} \end{aligned}$$

No necesitas saber nada sobre los Tres Chiflados para evaluar si los enunciados son verdaderos o falsos en este *modelo*. Hf es verdadero, dado que el referente de

f (Larry) está en la extensión de H. Tanto $\exists Hx$ como $\exists x \neg Hx$ son verdaderos, ya que hay al menos un miembro del UD que está en la extensión de H y hay al menos un miembro que no está en la extensión de H. De esta manera, el modelo captura todo el significado formal de la interpretación.

Ahora observa esta interpretación:

> UD: números enteros menores que 10
> Ex: x es par.
> Nx: x es negativo.
> Lxy: x es menor que y.
> Txyz: x por y es igual a z.

¿Cuál es el modelo que va con esta interpretación? El UD es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

La extensión de un predicado unario como E o N es simplemente el subconjunto del UD del que el predicado es verdadero. Hablando a grandes rasgos, la extensión del predicado E es el conjunto de Es en el UD. La extensión de E es el subconjunto $\{2, 4, 6, 8\}$. Hay muchos números pares aparte de estos cuatro, pero estos son los únicos miembros del UD que son pares. No hay números negativos en el UD, así que N tiene una extensión vacía; es decir extensión$(N) = \emptyset$.

La extensión de un predicado binario como L es algo fastidiosa. Parece como si la extensión de L tuviera que contener el 1, dado que el 1 es menor que todos los otros números; tendría que contener el 2, dado que el 2 es menor que todos los otros números menos el 1; y así sucesivamente. Todos los miembros del UD menos el 9 son menores que algún miembro del UD. ¿Qué pasaría si simplemente escribiéramos extensión$(L) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

El problema es que los conjuntos pueden escribirse en cualquier orden, así que sería lo mismo que escribir extensión$(L) = \{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$. Esto no nos dice qué miembros del conjunto son menores que qué otros miembros.

Necesitamos alguna forma de mostrar que 1 es menor que 8 pero 8 no es menor que 1. La solución es que la extensión de L consista en pares de números. Un PAR ORDENADO es como un conjunto con dos miembros, con la excepción de que el orden *sí* que importa. Escribimos los pares ordenados con corchetes angulares '$<$' y '$>$'. El par ordenado <tal, cual> es diferente del par ordenado <cual, tal>. La extensión de L es una colección de pares ordenados, todos los pares de números del UD tales que el primer número es menor que el segundo. Escribiendo esto completamente:

extensión$(L) = \{$<1,2>, <1,3>, <1,4>, <1,5>, <1,6>, <1,7>, <1,8>, <1,9>, <2,3>, <2,4>, <2,5>, <2,6>, <2,7>, <2,8>, <2,9>, <3,4>, <3,5>, <3,6>, <3,7>, <3,8>, <3,9>, <4,5>, <4,6>, <4,7>, <4,8>, <4,9>, <5,6>, <5,7>, <5,8>, <5,9>, <6,7>, <6,8>, <6,9>, <7,8>, <7,9>, <8,9>$\}$

Los predicados ternarios funcionarán de forma similar, la extensión de un predicado ternario es un conjunto de ternas ordenadas en las que el predicado es verdadero de esas tres cosas *en ese orden.* Así que la extensión de T es este modelo contendrá ternas ordenadas como <2,4,8>, porque $2 \times 4 = 8$.

En general, la extensión de un predicado n-ario es el conjunto de todas las n-tuplas $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ tales que a_1–a_n son miembros del UD y el predicado es verdadero de a_1–a_n en ese orden.

5.3. Semántica para la identidad

La identidad es un predicado especial de la LC. La escribimos de manera un poco diferente que otros predicados binarios: $x = y$ en lugar de Ixy. Tampoco necesitamos incluirla en una clave de simbolización. El enunciado $x = y$ siempre significa 'x es idéntico a y', y no puede interpretarse de otra manera. De la misma forma, cuando se construye un modelo, no se puede elegir cuáles de los pares ordenados van en la extensión del predicado de identidad. Siempre contiene el par ordenado de cada uno de los objetos del UD consigo mismo.

El enunciado $\forall x lxx$, que contiene un predicado binario ordinario, es contingente. Si es verdadero o no para una interpretación depende de cómo se interprete l, y si es verdadero o no en un modelo depende de la extensión de l.

El enunciado $\forall x\ x = x$ es una tautología. La extensión de la identidad siempre hará que sea verdadero.

Date cuenta de que, aunque la identidad siempre tiene la misma interpretación, no siempre tiene la misma extensión. La extensión de la identidad depende del UD. Si el UD en un modelo es el conjunto {Doug}, entonces extensión(=) en ese modelo es {<Doug, Doug>}. Si el UD es el conjunto {Doug, Omar}, entonces extensión(=) en ese modelo es {<Doug, Doug>, <Omar, Omar>}. Y así sucesivamente.

Si el referente de dos constantes es el mismo, entonces cualquier cosa que sea verdad de una de ellas es verdad de la otra. Por ejemplo, si referente(a) = referente(b), entonces $Aa \leftrightarrow Ab$, $Ba \leftrightarrow Bb$, $Ca \leftrightarrow Cb$, $Rca \leftrightarrow Rcb$, $\forall xRxa \leftrightarrow \forall xRxb$, y así con dos enunciados cualesquiera que contengan a y b. Sin embargo, lo opuesto no es cierto.

Es posible que todo lo que sea verdadero de a sea también verdadero de b, pero que aun así a y b tengan referentes distintos. Esto puede parecer sorprendente, pero es fácil construir un modelo que lo muestre. Observa este modelo:

$$\begin{aligned}
\text{UD} &= \{\text{Rosencrantz, Guildenstern}\}\\
\text{referente}(a) &= \text{Rosencrantz}\\
\text{referente}(b) &= \text{Guildenstern}\\
\text{para todos los predicados } \mathcal{P},\ \text{extensión}(\mathcal{P}) &= \emptyset\\
\text{extensión}(=) &= \{<\text{Rosencrantz, Rosencrantz}>,\\
&\quad <\text{Guildenstern, Guildenstern}>\}
\end{aligned}$$

Esto especifica una extensión para cada uno de los predicados de la LC: todos los infinitos predicados están vacíos. Esto significa que tanto Aa como Ab son falsos, y son equivalentes; tanto Ba como Bb son falsos; y así sucesivamente con dos enunciados cualesquiera que contengan a y b. No obstante, a y b se refieren a cosas diferentes. Hemos escrito la extensión de la identidad para dejar esto claro. El par ordenado $\langle \text{referente}(a), \text{referente}(b)\rangle$ no está en ella. En este modelo, $a = b$ es falso y $a \neq b$ es verdadero.

5.4. Trabajar con modelos

Usaremos el símbolo de la implicación semántica para la LC como lo hicimos para la LE. '$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$' significa que '$\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$': Cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos enunciados de la LC, $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ significa que no hay ningún modelo en el que $\mathcal{A}$ sea verdadero $\mathcal{B}$ sea falso. $\models \mathcal{A}$ significa que $\mathcal{A}$ es verdadero en todos los modelos.

Esto nos permite dar definiciones para varios conceptos de la LC. Dado que estamos usando el mismo símbolo, estas definiciones serán similares a las definiciones en la LE. Recuerda, sin embargo, que las definiciones en la LC son en términos de *modelos* en lugar de en términos de asignaciones de valores de verdad.

> Una TAUTOLOGÍA EN LC es un enunciado $\mathcal{A}$ que es verdadero en todos los modelos; es decir, $\models \mathcal{A}$.
>
> Una CONTRADICCIÓN EN LC es un enunciado $\mathcal{A}$ que es falso en todos los modelos; es decir, $\models \neg\mathcal{A}$.
>
> Un enunciado es CONTINGENTE EN LC si y solo si no es ni una tautología ni una contradicción.
>
> Un argumento "$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \therefore\ \mathcal{C}$ " es VÁLIDO EN LC si y solo si no hay ningún modelo en el que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa; es decir, $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots\} \models \mathcal{C}$. De lo contrario, es INVÁLIDO EN LC.

> Dos enunciados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son LÓGICAMENTE EQUIVALENTES EN LC si y solo si $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \models \mathcal{A}$.
>
> El conjunto $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots\}$ es CONSISTENTE EN LC si y solo si hay al menos un modelo en el que todos los enunciados sean verdaderos. El conjunto es INCONSISTENTE EN LC si y solo si no existe tal modelo.

Construir modelos

Supón que queremos mostrar que $\forall x Axx \rightarrow Bd$ *no* es una tautología. Esto requiere mostrar que el enunciado no es verdadero en todos los modelos; es decir, que es falso en algún modelo. Si podemos proporcionar un solo modelo en el que el enunciado sea falso, entonces habremos mostrado que el enunciado no es una tautología.

¿Cómo sería tal modelo? Para que $\forall x Axx \rightarrow Bd$ sea falso, el antecedente ($\forall x Axx$) debe ser verdadero y el consecuente (Bd) debe ser falso.

Para construir tal modelo, empezamos con un UD. Será más fácil especificar las extensiones de los predicados si tenemos un UD pequeño, así que empieza con un UD que solo tenga un miembro. Formalmente, este único miembro puede ser cualquier cosa. Digamos que es la ciudad de París.

Queremos que $\forall x Axx$ sea verdadero, así que nos interesa que todos los miembros del UD estén emparejados consigo mismos en la extensión de A; esto significa que la extensión de A debe ser {<París, París>}.

Queremos que Bd sea falso, así que el referente de d no debe estar en la extensión de B. Damos a B una extensión vacía.

Dado que París es el único miembro del UD, debe ser el referente de d. El modelo que hemos construido tiene este aspecto:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Paris}\} \\ \text{extensión}(A) &= \{<\text{Paris,Paris}>\} \\ \text{extensión}(B) &= \emptyset \\ \text{referente}(d) &= \text{Paris} \end{aligned}$$

Estrictamente hablando, un modelo especifica una extensión para *todos* los predicados de la LC y un referente para *todas* las constantes. Así que generalmente es imposible escribir un modelo completo. Para ello se necesitaría escribir infinitas extensiones e infinitos referentes. Sin embargo, no necesitamos tener en cuenta todos los predicados para mostrar que hay modelos en los que $\forall x Axx \rightarrow Bd$ es falso. Predicados como H y constantes como f_{13} no tienen ninguna influencia en la verdad o falsedad de este enunciado. Es suficiente con especificar las extensiones de A y B y un referente para d, como hemos hecho. Esto nos da un *modelo parcial* en el que el enunciado es falso.

Quizá te estés preguntando: ¿Qué significa el predicado A en español? El modelo parcial podría corresponder a una interpretación como esta:

UD: París
Axy**:** x está en el mismo país que y.
Bx**:** x fue fundado en el siglo XX.
d**:** la Ciudad de las Luces

Sin embargo, lo único que nos dice el modelo parcial es que A es un predicado que es verdadero de París y París. Hay un número indefinido de predicados en español que tienen esta extensión. Axy podría traducirse también como 'x tiene el mismo tamaño que y' o 'x e y son ciudades'. De la misma forma, Bx es algún predicado que no se aplica a París; podría traducirse también como 'x está en una isla' o 'x es un coche utilitario'. Cuando especificamos las extensiones de A y B, no especificamos qué predicados en español deberían usarse para traducir A y B. Nos interesa saber si $\forall xAxx \to Bd$ resulta ser verdadero o falso, y lo único que importa para la verdad o la falsedad en la LC es la información del modelo: el UD, las extensiones de los predicados y los referentes de las constantes.

Podemos mostrar igual de fácilmente que $\forall xAxx \to Bd$ no es una contradicción. Solo tenemos que especificar un modelo en el que $\forall xAxx \to Bd$ sea verdadero; es decir, un modelo en el que $\forall xAxx$ sea falso o Bd sea verdadero. Aquí hay un modelo parcial así:

$$\begin{aligned}
\text{UD} &= \{\text{Paris}\} \\
\text{extensión}(A) &= \{<\text{Paris,Paris}>\} \\
\text{extensión}(B) &= \{\text{Paris}\} \\
\text{referente}(d) &= \text{Paris}
\end{aligned}$$

Ahora ya hemos mostrado que $\forall xAxx \to Bd$ no es ni una tautología ni una contradicción. Por la definición de 'contingente en LC', eso significa que $\forall xAxx \to Bd$ es contingente. En general, para mostrar que un enunciado es contingente se necesitan dos modelos: uno en el que el enunciado sea verdadero y otro en el que el enunciado sea falso.

Supón que queremos mostrar que $\forall xSx$ y $\exists xSx$ no son lógicamente equivalentes. Tenemos que construir un modelo en el que los dos enunciados tengan diferentes valores de verdad; nos interesa que uno de ellos sea verdadero y el otro falso. Empezamos especificando un UD. De nuevo, hacemos que el UD sea pequeño para poder especificar fácilmente las extensiones. Necesitaremos al menos dos miembros. Sea el UD {Duke, Miles}. (Si escogiéramos un UD con solo un miembro, los dos enunciados terminarían con el mismo valor de verdad. Para ver por qué, intenta construir algunos modelos parciales con UD de un miembro.)

Podemos hacer que $\exists xSx$ sea verdadero incluyendo algo en la extensión de S, y podemos hacer que $\forall x Sx$ sea falso dejando algo fuera de la extensión de S. No importa cuál incluimos y cuál dejamos fuera. Hacemos que Duke sea el único S y obtenemos el siguiente modelo parcial:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Duke, Miles}\} \\ \text{extensión}(S) &= \{\text{Duke}\} \end{aligned}$$

Este modelo parcial muestra que los dos enunciados *no* son lógicamente equivalentes.

En la p. 69 dijimos que este argumento sería inválido en la LC.

$$\begin{array}{ll} & (Rc \,\&\, K_1 c) \,\&\, Tc \\ \therefore & Tc \,\&\, K_2 c \end{array}$$

Para mostrar que es inválido, necesitamos mostrar que hay algún modelo en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Podemos construir expresamente ese modelo. Esta es una forma de hacerlo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Björk}\} \\ \text{extensión}(T) &= \{\text{Björk}\} \\ \text{extensión}(K_1) &= \{\text{Björk}\} \\ \text{extensión}(K_2) &= \emptyset \\ \text{extensión}(R) &= \{\text{Björk}\} \\ \text{referente}(c) &= \{\text{Björk}\} \end{aligned}$$

De igual forma, podemos mostrar que un conjunto de enunciados es consistente construyendo un modelo en el que todos los enunciados sean verdaderos.

Razonar sobre todos los modelos

Podemos mostrar que un enunciado *no* es una tautología simplemente proporcionando un modelo cuidadosamente especificado: un modelo en el que el enunciado sea falso. Por otro lado, para mostrar que algo es una tautología, no sería suficiente construir diez, cien o incluso mil modelos en los que el enunciado fuera verdadero. Solo es una tautología si es verdadero en *todos* los modelos, y hay infinitos modelos. Esto no se puede evitar construyendo modelos parciales, porque hay infinitos modelos parciales.

Piensa, por ejemplo, en el enunciado $Raa \leftrightarrow Raa$. Hay dos modelos parciales de este enunciado lógicamente distintos que tienen un UD de un miembro. Hay 32 modelos parciales distintos que tienen un UD de 2 miembros. Hay 1526 modelos parciales distintos que tienen un UD de 3 miembros. Hay 262.144 modelos parciales distintos que tienen un UD de 4 miembros. Y así hasta el infinito. Para mostrar que este enunciado es una tautología, tenemos que mostrar algo

Tabla 5.1: Es relativamente fácil contestar a una pregunta si se puede hacer construyendo uno o dos modelos. Es mucho más difícil si hay que razonar sobre todos los modelos posibles. Esta tabla muestra en qué casos es suficiente con construir modelos.

	SÍ	NO
¿Es $\mathcal{A}$ una tautología?	mostrar que $\mathcal{A}$ debe ser verdadero en cualquier modelo	*construir un modelo* en el que $\mathcal{A}$ sea falso
¿Es $\mathcal{A}$ una contradicción?	mostrar que $\mathcal{A}$ debe ser falso en cualquier modelo	*construir un modelo* en el que $\mathcal{A}$ sea verdadero
¿Es $\mathcal{A}$ contingente?	*construir dos modelos*, uno en el que $\mathcal{A}$ sea verdadero y otro en el que $\mathcal{A}$ sea falso	mostrar que $\mathcal{A}$ es una tautología o mostrar que $\mathcal{A}$ es una contradicción
¿Son equivalentes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$?	mostrar que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ deben tener el mismo valor de verdad en cualquier modelo	*contruir un modelo* en el que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tengan diferentes valores de verdad
¿Es consistente el conjunto $\mathbb{A}$?	*construir un modelo* en el que todos los enunciados de $\mathbb{A}$ sean verdaderos	mostrar que en cualquier modelo no todos los enunciados pueden ser verdaderos
¿Es válido el argumento '$\mathcal{P}$, $\therefore$ $\mathcal{C}$'?	mostrar que cualquier modelo en el que $\mathcal{P}$ sea verdadero también hace que $\mathcal{C}$ sea verdadero	*construir un modelo* en el que $\mathcal{P}$ sea verdadero y $\mathcal{C}$ sea falso

sobre todos estos modelos. No hay ninguna posibilidad de hacerlo tratando los modelos uno por uno.

No obstante, $Raa \leftrightarrow Raa$ es obviamente una tautología. Podemos demostrarlo con un simple argumento:

> Hay dos tipos de modelos: aquellos en los que $\langle \text{referente}(a), \text{referente}(a) \rangle$ está en la extensión de R y aquellos en los que no. En el primer tipo de modelos, Raa es verdadero; y, por la tabla de verdad del bicondicional, $Raa \leftrightarrow Raa$ también es verdadero. En el segundo tipo de modelos, Raa es falso; esto hace que $Raa \leftrightarrow Raa$ sea verdadero. Dado que el enunciado es verdadero en ambos tipos de modelos, y dado que todo modelo es de uno de los dos tipos, $Raa \leftrightarrow Raa$ es

verdadero en todo modelo. Por lo tanto, es una tautología.

Este argumento es válido, por supuesto, y su conclusión es verdadera. Sin embargo, no es un argumento en LC. Es un argumento en español *sobre* la LC; es un argumento en el metalenguaje. No hay un procedimiento formal para evaluar o construir argumentos en lenguaje natural como este. La imprecisión del lenguaje natural es precisamente la razón por la que empezamos a pensar en lenguajes formales.

Hay más dificultades con este enfoque.

Piensa en el enunciado $\forall x(Rxx \rightarrow Rxx)$, otra tautología evidente. Podría ser tentador razonar de esta manera: '$Rxx \leftrightarrow Rxx$ es verdadero en todo modelo, así que $\forall x(Rxx \rightarrow Rxx)$ debe ser verdadero'. El problema es que $Rxx \rightarrow Rxx$ *no* es verdadero en todo modelo. No es un enunciado, así que no es *ni* verdadero *ni* falso. Todavía no tenemos el vocabulario necesario para decir lo que queremos decir sobre $Rxx \rightarrow Rxx$. En la siguiente sección presentaremos el concepto de *satisfacción*; después de hacerlo, seremos más capaces de proporcionar un argumento de que $\forall x(Rxx \rightarrow Rxx)$ es una tautología.

Es necesario razonar sobre una infinidad de modelos para mostrar que un enunciado es una tautología. Igualmente, es necesario razonar sobre una infinidad de procesos para mostrar que un enunciado es una contradicción, que dos enunciados son equivalentes, que un conjunto de enunciados es inconsistente, o que un argumento es válido. Hay otras cosas que podemos mostrar construyendo cuidadosamente uno o dos modelos. La tabla 5.1 resume cuáles son cuáles.

5.5. La verdad en la LC

Para la LE, dividimos la definición de verdad en dos partes: una asignación de valores de verdad (a) para las letras de enunciados y una función de verdad (v) para todos los enunciados. La función de verdad cubría la forma en que se podían construir enunciados complejos a partir de letras de enunciados y conectivas.

De la misma forma que la verdad en la LE es siempre *la verdad dada una asignación de valores de verdad*, la verdad en la LC es *la verdad en un modelo*. El enunciado atómico más simple de la LC consta de un predicado unario seguido de una constante, como Pj. Es verdadero en un modelo $\mathbb{M}$ si y solo si el referente de j está en la extensión de P en $\mathbb{M}$.

Podríamos continuar de esta forma para definir la verdad para todos los enunciados atómicos que contengan solo predicados y constantes: Piensa en cualquier enunciado de la forma $\mathcal{R}c_1 \ldots c_n$ donde $\mathcal{R}$ es un predicado n-ario y las c son constantes. Es verdadero en $\mathbb{M}$ si y solo si $\langle$referente$(c_1), \ldots,$ referente$(c_n)\rangle$ está en extensión($\mathcal{R}$) en $\mathbb{M}$.

Después podríamos definir la verdad para los enunciados construidos con conectivas de enunciados de la misma forma que lo hicimos para la LE. Por ejemplo, el enunciado $(Pj \rightarrow Mda)$ es verdadero en $\mathbb{M}$ si Pj es falso en $\mathbb{M}$ o si Mda es verdadero en $\mathbb{M}$.

Desgraciadamente, este enfoque fallaría al llegar a los enunciados que contienen cuantificadores. Piensa en $\forall xPx$. ¿Cuándo es verdadero en un modelo $\mathbb{M}$? La respuesta no puede depender de si Px es verdadero o falso en $\mathbb{M}$, porque la x en Px es una variable libre. Px no es un enunciado. No es ni verdadero ni falso.

Podíamos dar una definición recursiva de la verdad en la LE porque toda fórmula bien formada de la LE tiene un valor de verdad. Esto no es así en la LC, así que no podemos definir la verdad empezando por la verdad de los enunciados atómicos y avanzando. También tenemos que pensar en las fórmulas atómicas que no son enunciados. Para ello definiremos la *satisfacción*; toda fórmula bien formada de la LC será satisfecha o no satisfecha, incluso si no tiene un valor de verdad. Entonces podremos definir la *verdad* para los enunciados de la LC en términos de satisfacción.

Satisfacción

La fórmula Px dice, vagamente, que x es uno de los P. Esto, sin embargo, no puede ser correcto, porque x es una variable y no una constante. No nombra ningún miembro concreto del UD. En lugar de ello, su significado en un enunciado está determinado por el cuantificador al que está ligada. La variable x debe representar a todos los miembros del UD en el enunciado $\forall xPx$, pero solo tiene que representar a un miembro en $\exists xPx$. Dado que queremos que la definición de satisfacción llegue a Px sin ningún cuantificador, empezaremos por decir cómo interpretar una variable libre como la x en Px.

Hacemos esto introduciendo una *asignación de variables*. Formalmente, esto es una función que hace corresponder cada variable con un miembro del UD. Llamemos a esta función 'a'. (La 'a' es de 'asignación', pero no es la misma que la asignación de valores de verdad que usamos para definir la verdad en la LE.)

La fórmula Px es satisfecha en un modelo $\mathbb{M}$ por una asignación de variables a si y solo si $a(x)$, el objeto que a asigna a x, está en la extensión de P en $\mathbb{M}$.

¿Cuándo se satisface $\forall xPx$? No es suficiente que Px sea satisfecha en $\mathbb{M}$ por a, porque eso solo significa que $a(x)$ está en extensión(P). $\forall xPx$ requiere que todos los otros miembros del UD estén también en extensión(P).

Así que necesitamos un poco más de notación técnica: para cualquier miembro

Ω del UD y cualquier variable χ, sea $a[\Omega|\chi]$ la asignación de variables que asigna Ω a χ pero coincide con a en cualquier otro respecto. Hemos usado Ω, la letra griega omega, para subrayar el hecho de que se trata de algún miembro del UD y no algún símbolo de la LC. Supón, por ejemplo, que el UD consiste en los presidentes de los Estados Unidos. La función $a[\text{Grover Cleveland}|x]$ asigna Grover Cleveland a la variable x, independientemente de lo que asigne a a x; para cualquier otra variable, $a[\text{Grover Cleveland}|\text{x}]$ coincide con a.

Ahora podemos decir de manera concisa que $\forall x Px$ es satisfecho en un modelo $\mathbb{M}$ por una asignación de variables a si y solo si, para todo objeto Ω del UD de $\mathbb{M}$, Px es satisfecho en $\mathbb{M}$ por $a[\Omega|x]$.

Puede que te preocupe que esto sea circular, porque da las condiciones de satisfacción para el enunciado $\forall x Px$ usando la expresión 'para todo objeto'. Sin embargo, es importante recordar la diferencia entre un símbolo lógico como '$\forall$' y una palabra española como 'todo'. La palabra es parte del metalenguaje que usamos para definir las condiciones de satisfacción de enunciados del lenguaje objeto que contienen el símbolo.

Ahora podemos dar una definición general de satisfacción a partir de los casos que ya hemos comentado. Definimos una función s (de 'satisfacción') en un modelo $\mathbb{M}$ tal que para cualquier fbf $\mathcal{A}$ y cualquier asignación de variables a, $s(\mathcal{A}, a) = 1$ si $\mathcal{A}$ es satisfecha en $\mathbb{M}$ por a, en caso contrario $s(\mathcal{A}, a) = 0$.

1. Si $\mathcal{A}$ es una fbf atómica de la forma $\mathcal{P}t_1 \ldots t_n$ y Ω_i es el objeto seleccionado por t_i, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle \Omega_1 \ldots \Omega_n \rangle \text{ está en extensión}(\mathcal{P}) \text{ en } \mathbb{M}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

   Para cada término t_i: Si t_i es una constante, entonces $\Omega_i = \text{referente}(t_i)$. Si t_i es una variable, entonces $\Omega_i = a(t_i)$.

2. Si $\mathcal{A}$ es $\neg\mathcal{B}$ para alguna fbf $\mathcal{B}$, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\mathcal{B}, a) = 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

3. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})$ para algunas fbfs $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\mathcal{B}, a) = 1 \text{ y } s(\mathcal{C}, a) = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

4. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ para algunas fbfs $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(\mathcal{B}, a) = 0 \text{ y } s(\mathcal{C}, a) = 0, \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

5. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ para algunas fbfs $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(\mathcal{B}, a) = 1 \text{ y } s(\mathcal{C}, a) = 0, \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

6. Si $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$ para algunos enunciados $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\mathcal{B}, a) = s(\mathcal{C}, a), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

7. Si $\mathcal{A}$ es $\forall \chi \mathcal{B}$ para alguna fbf $\mathcal{B}$ y alguna variable χ, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\mathcal{B}, a[\Omega|\chi]) = 1 \text{ para todo miembro } \Omega \text{ del UD,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

8. Si $\mathcal{A}$ es $\exists \chi \mathcal{B}$ para alguna fbf $\mathcal{B}$ y alguna variable χ, entonces

$$s(\mathcal{A}, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\mathcal{B}, a[\Omega|\chi]) = 1 \text{ para al menos un miembro } \Omega \text{ del UD,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esta definición sigue la misma estructura que la definición de fbf de la LC, así que sabemos que toda fbf de la LC estará cubierta por esta definición. Para un modelo $\mathbb{M}$ y una asignación de variables a, toda fbf será satisfecha o no lo será. Ninguna fbf queda fuera y a ninguna se le asignan valores en conflicto.

Verdad

Piensa en un enunciado simple como $\forall x Px$. Según la parte 7 de la definición de satisfacción, este enunciado se satisface si $a[\Omega|x]$ satisface Px en $\mathbb{M}$ para todo Ω en el UD. Según la parte 1 de la definición, este será el caso si todos los Ω están en la extensión de P. Que $\forall x Px$ se satisfaga o no es algo que no depende de la asignación de variables a. Si este enunciado se satisface, entonces es verdadero. Esto es una formalización de lo que hemos estado diciendo todo el tiempo. $\forall x Px$ es verdadero si todo lo que está en el UD está en la extensión de P.

Lo mismo vale para cualquier enunciado de la LC. Dado que todas las variables están ligadas, un enunciado se satisface o no independientemente de los detalles de la asignación de variables. Así que podemos definir la verdad de esta manera: Un enunciado $\mathcal{A}$ es VERDADERO EN $\mathbb{M}$ si y solo si alguna asignación de variables satisface $\mathcal{A}$ en M; de lo contrario $\mathcal{A}$ es FALSO EN $\mathbb{M}$.

La verdad en la LC es *la verdad en un modelo*. Los enunciados de la LC no son absolutamente verdaderos o falsos en tanto que meros símbolos, sino en relación con un modelo. Un modelo proporciona el significado de los símbolos en la medida en que influye en la verdad o falsedad.

Razonar sobre todos los modelos (continuación)

Al final de la sección 5.4, nos vimos incapaces de mostrar que $\forall x(Rxx \to Rxx)$ es una tautología. Ahora que hemos definido la satisfacción, podemos razonar de esta forma:

> Piensa en algún modelo arbitrario $\mathbb{M}$. Ahora piensa en un miembro arbitrario del UD; por comodidad, llámalo Ω. Debe darse el caso de que o bien $\langle\Omega, \Omega\rangle$ esté en la extensión de R o de que no esté. Si $\langle\Omega, \Omega\rangle$ está en la extensión de R, entonces Rxx es satisfecho por una asignación de variables que asigne Ω a x (por la parte 1 de la definición de satisfacción); dado que el consecuente de $Rxx \to Rxx$ es satisfecho, el condicional es satisfecho (por la parte 5). Si $\langle\Omega, \Omega\rangle$ no está en la extensión de R, entonces Rxx no es satisfecho por una asignación de variables que asigne Ω a x (por la parte 1); dado que el antecedente de $Rxx \to Rxx$ no es satisfecho, el condicional es satisfecho (por la parte 5). En cualquier caso, $Rxx \to Rxx$ es satisfecho. Esto es cierto para cualquier miembro del UD, así que $\forall x(Rxx \to Rxx)$ es satisfecho por cualquier asignación de valores de verdad (por la parte 7). Así que $\forall x(Rxx \to Rxx)$ es verdadero en $\mathbb{M}$ (por la definición de verdad). Este argumento se sostiene independientemente de cuál sea exactamente el UD e independientemente de la extensión exacta de R, así que $\forall x(Rxx \to Rxx)$ es verdadero en cualquier modelo. Por lo tanto, es una tautología.

Para ofrecer argumentos sobre todos los modelos posibles habitualmente se necesita una sabia combinación de dos estrategias:

1. Dividir los casos entre dos tipos posibles, de modo que todos los casos sean de un tipo o de otro. En el argumento de la p. 101, por ejemplo, distinguimos dos tipos de modelos basándonos en si un par ordenado específico estaba en extensión(R). En el argumento anterior, distinguimos entre casos en los que un par ordenado estaba en extensión(R) y casos en los que no.

2. Tomar un objeto arbitrario como una forma de mostrar algo más general. En el argumento anterior, era crucial que Ω fuese simplemente algún miembro arbitrario del UD. No asumimos nada especial sobre él. Por tanto, cualquier cosa que pudiéramos mostrar que valía para Ω debía valer para todos los miembros del UD —si podíamos mostrarlo para Ω, podíamos mostrarlo para cualquier cosa. De la misma forma, no asumimos nada especial sobre $\mathbb{M}$, así que cualquier cosa que pudiéramos mostrar sobre $\mathbb{M}$ debía valer para todos los modelos.

Piensa en este otro ejemplo. El argumento $\forall x(Hx \,\&\, Jx)$ $\therefore \forall x Hx$ es evidentemente válido. Solo podemos mostrar que el argumento es válido pensando en qué debe ser verdadero en todos los modelos en los que la premisa sea verdadera.

> Tomemos un modelo arbitrario $\mathbb{M}$ en el que la premisa $\forall x(Hx \,\&\, Jx)$ sea verdadera. La conjunción $Hx \,\&\, Jx$ se satisface independientemente de cuál sea la asignación de x, así que Hx también debe satisfacerse (por la parte 3 de la definición de satisfacción). Por tanto, $(\forall x)Hx$ es satisfecho por cualquier asignación de variables (por la parte 7 de la definición de satisfacción) y verdadero en $\mathbb{M}$ (por la definición de verdad). Dado que no hemos asumido nada sobre $\mathbb{M}$ aparte de que $\forall x(Hx \,\&\, Jx)$ es verdadero, $(\forall x)Hx$ debe ser verdadero en cualquier modelo en el que $\forall x(Hx \,\&\, Jx)$ sea verdadero. Así que $\forall x(Hx \,\&\, Jx) \models \forall xHx$.

Incluso con un argumento simple como este, el razonamiento es algo complicado. Con argumentos más largos, el razonamiento puede ser insufrible. El problema surge porque hablar sobre una infinidad de modelos requiere que razonemos sobre cosas en español. ¿Qué podemos hacer?

Podemos intentar formalizar nuestro razonamiento sobre modelos, codificando las estrategias de "divide y vencerás" que hemos usado antes. Este enfoque, llamado originalmente *tableaux semánticos*, fue elaborado en la década de 1950 por Evert Beth y Jaakko Hintikka. En la actualidad sus tableaux se llaman más comúnmente *árboles de verdad*

Un enfoque más tradicional consiste en considerar los argumentos deductivos como demostraciones. Un *sistema de demostración* consta de reglas que distinguen formalmente entre argumentos legítimos e ilegítimos —sin tener en cuenta los modelos o los significados de los símbolos. En el siguiente capítulo desarrollamos sistemas de demostración para la LE y la LC.

Ejercicios

⋆ **Parte A** Determina si cada uno de los enunciados es verdadero o falso en el modelo dado.

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Corwin, Benedict}\} \\ \text{extensión}(A) &= \{\text{Corwin, Benedict}\} \\ \text{extensión}(B) &= \{\text{Benedict}\} \\ \text{extensión}(N) &= \emptyset \\ \text{referente}(c) &= \text{Corwin} \end{aligned}$$

1. Bc
2. $Ac \leftrightarrow \neg Nc$
3. $Nc \rightarrow (Ac \vee Bc)$
4. $\forall xAx$

5. $\forall x \neg Bx$
6. $\exists x(Ax \,\&\, Bx)$
7. $\exists x(Ax \to Nx)$
8. $\forall x(Nx \vee \neg Nx)$
9. $\exists x Bx \to \forall x Ax$

⋆ **Parte B** Determina si cada uno de los enunciados es verdadero o falso en el modelo dado.

$$\begin{array}{rcl} \text{UD} & = & \{\text{Waylan, Willy, Johnny}\} \\ \text{extensión}(H) & = & \{\text{Waylan, Willy, Johnny}\} \\ \text{extensión}(W) & = & \{\text{Waylan, Willy}\} \\ \text{extensión}(R) & = & \{<\text{Waylan, Willy}>,<\text{Willy, Johnny}>,<\text{Johnny, Waylan}>\} \\ \text{referente}(m) & = & \text{Johnny} \end{array}$$

1. $\exists x(Rxm \,\&\, Rmx)$
2. $\forall x(Rxm \vee Rmx)$
3. $\forall x(Hx \leftrightarrow Wx)$
4. $\forall x(Rxm \to Wx)$
5. $\forall x\big[Wx \to (Hx \,\&\, Wx)\big]$
6. $\exists x Rxx$
7. $\exists x \exists y Rxy$
8. $\forall x \forall y Rxy$
9. $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$
10. $\forall x \forall y \forall z\big[(Rxy \,\&\, Ryz) \to Rxz\big]$

Parte C Determina si cada uno de los enunciados es verdadero o falso en el modelo dado.

$$\begin{array}{rcl} \text{UD} & = & \{\text{Lemmy, Courtney, Eddy}\} \\ \text{extensión}(G) & = & \{\text{Lemmy, Courtney, Eddy}\} \\ \text{extensión}(H) & = & \{\text{Courtney}\} \\ \text{extensión}(M) & = & \{\text{Lemmy, Eddy}\} \\ \text{referente}(c) & = & \text{Courtney} \\ \text{referente}(e) & = & \text{Eddy} \end{array}$$

1. Hc
2. He
3. $Mc \vee Me$
4. $Gc \vee \neg Gc$
5. $Mc \to Gc$
6. $\exists x Hx$
7. $\forall x Hx$
8. $\exists x \neg Mx$

9. $\exists x(Hx \& Gx)$
10. $\exists x(Mx \& Gx)$
11. $\forall x(Hx \vee Mx)$
12. $\exists xHx \& \exists xMx$
13. $\forall x(Hx \leftrightarrow \neg Mx)$
14. $\exists xGx \& \exists x\neg Gx$
15. $\forall x\exists y(Gx \& Hy)$

$\star$ **Parte D** Escribe el modelo que corresponde a la interpretación dada.

UD: números naturales del 10 al 13.
Ox: x es impar.
Sx: x es menor que 7.
Tx: x es un número de dos dígitos.
Ux: x se considera de mala suerte.
Nxy: x es el siguiente número después de y.

Parte E Muestra que cada uno de los siguientes enunciados es contingente.

$\star$ 1. $Da \& Db$
$\star$ 2. $\exists xTxh$
$\star$ 3. $Pm \& \neg\forall xPx$
4. $\forall zJz \leftrightarrow \exists yJy$
5. $\forall x(Wxmn \vee \exists yLxy)$
6. $\exists x(Gx \to \forall yMy)$

$\star$ **Parte F** Muestra que los siguientes pares de enunciados no son lógicamente equivalentes.

1. Ja, Ka
2. $\exists xJx$, Jm
3. $\forall xRxx$, $\exists xRxx$
4. $\exists xPx \to Qc$, $\exists x(Px \to Qc)$
5. $\forall x(Px \to \neg Qx)$, $\exists x(Px \& \neg Qx)$
6. $\exists x(Px \& Qx)$, $\exists x(Px \to Qx)$
7. $\forall x(Px \to Qx)$, $\forall x(Px \& Qx)$
8. $\forall x\exists yRxy$, $\exists x\forall yRxy$
9. $\forall x\exists yRxy$, $\forall x\exists yRyx$

Parte G Muestra que los siguientes conjuntos de enunciados son consistentes.

1. {Ma, ¬Na, Pa, ¬Qa}
2. $\{Lee, Lef, \neg Lfe, \neg Lff\}$

3. $\{\neg(Ma \,\&\, \exists xAx),\ Ma \vee Fa,\ \forall x(Fx \rightarrow Ax)\}$
4. $\{Ma \vee Mb,\ Ma \rightarrow \forall x\neg Mx\}$
5. $\{\forall yGy,\ \forall x(Gx \rightarrow Hx),\ \exists y\neg Iy\}$
6. $\{\exists x(Bx \vee Ax),\ \forall x\neg Cx,\ \forall x\big[(Ax \,\&\, Bx) \rightarrow Cx\big]\}$
7. $\{\exists xXx,\ \exists xYx,\ \forall x(Xx \leftrightarrow \neg Yx)\}$
8. $\{\forall x(Px \vee Qx),\ \exists x\neg(Qx \,\&\, Px)\}$
9. $\{\exists z(Nz \,\&\, Ozz),\ \forall x\forall y(Oxy \rightarrow Oyx)\}$
10. $\{\neg\exists x\forall yRxy,\ \forall x\exists yRxy\}$

Parte H Construye modelos para mostrar que los siguientes argumentos son inválidos.

1. $\forall x(Ax \rightarrow Bx),\ \therefore\ \exists xBx$
2. $\forall x(Rx \rightarrow Dx),\ \forall x(Rx \rightarrow Fx),\ \therefore\ \exists x(Dx \,\&\, Fx)$
3. $\exists x(Px \rightarrow Qx),\ \therefore \exists xPx$
4. $Na \,\&\, Nb \,\&\, Nc,\ \therefore\ \forall xNx$
5. $Rde,\ \exists xRxd,\ \therefore\ Red$
6. $\exists x(Ex \,\&\, Fx),\ \exists xFx \rightarrow \exists xGx,\ \therefore\ \exists x(Ex \,\&\, Gx)$
7. $\forall xOxc,\ \forall xOcx,\ \therefore\ \forall xOxx$
8. $\exists x(Jx \,\&\, Kx),\ \exists x\neg Kx,\ \exists x\neg Jx,\ \therefore\ \exists x(\neg Jx \,\&\, \neg Kx)$
9. $Lab \rightarrow \forall xLxb,\ \exists xLxb,\ \therefore\ Lbb$

Parte I

⋆ 1. Muestra que $\{\neg Raa, \forall x(x = a \vee Rxa)\}$ es consistente.
⋆ 2. Muestra que $\{\forall x\forall y\forall z(x = y \vee y = z \vee x = z), \exists x\exists y\ x \neq y\}$ es consistente.
⋆ 3. Muestra que $\{\forall x\forall y\ x = y, \exists x\ x \neq a\}$ es inconsistente.
4. Muestra que $\exists x(x = h \,\&\, x = i)$ es contingente.
5. Muestra que $\{\exists x\exists y(Zx \,\&\, Zy \,\&\, x = y), \neg Zd, d = s\}$ es consistente.
6. Muestra que '$\forall x(Dx \rightarrow \exists yTyx)\ \therefore\ \exists y\exists z\ y \neq z$' es inválido.

Parte J

1. Muchos libros de lógica definen la consistencia y la inconsistencia de esta manera: "Un conjunto $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots\}$ es inconsistente si y solo si $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots\} \models (\mathcal{B} \,\&\, \neg\mathcal{B})$ para algún enunciado $\mathcal{B}$. Un conjunto es consistente si no es inconsistente."

   ¿Son diferentes los conjuntos que son consistentes según esta definición de los que son inconsistentes según la definición de la p. 91? Explica tu respuesta.

⋆ 2. Nuestra definición de verdad dice que un enunciado $\mathcal{A}$ es VERDADERO EN $\mathbb{M}$ si y solo si alguna asignación de variables satisface $\mathcal{A}$ en M. ¿Supondría alguna diferencia si en lugar de ello dijéramos que $\mathcal{A}$ es VERDADERO EN $\mathbb{M}$ si y solo si *todas* las asignaciones de variables satisfacen $\mathcal{A}$ en M? Explica tu respuesta.

Capítulo 6

Demostraciones

Observa estos dos argumentos en LE:

Argumento A

$$\begin{array}{ll} & P \vee Q \\ & \neg P \\ \therefore & \text{Q} \end{array}$$

Argumento B

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & P \\ \therefore & \text{Q} \end{array}$$

Son argumentos claramente válidos. Puedes confirmar que son válidos construyendo tablas de verdad de cuatro líneas. El argumento A hace uso de una forma de inferencia que siempre es válida: dada una disyunción y la negación de uno de los términos, se sigue el otro término como una consecuencia válida. Esta regla se llama *silogismo disyuntivo*.

El argumento B hace uso de una forma de inferencia diferente: dado un condicional y su antecedente, se sigue el consecuente como una consecuencia válida. Esto se llama *modus ponens*.

Cuando construimos tablas de verdad no tenemos que dar nombres a diferentes formas de inferencia. No hay razón para distinguir un modus ponens de un silogismo disyuntivo. Sin embargo, por esta misma razón, el método de las tablas de verdad no muestra claramente *por qué* un argumento es válido. Si hicieras una tabla de verdad de 1024 líneas para un argumento que contuviera diez letras de enunciado, podrías comprobar si hay alguna línea en la que todas las premisas fueran verdaderas y la conclusión falsa. Si no vieras tal línea y si no hubieras cometido ningún error al construir la tabla, entonces sabrías que el argumento es válido. Pero no podrías decir nada más sobre por qué ese argumento en concreto era una forma de argumento válida.

El objetivo de un *sistema de demostración* es mostrar que determinados argumentos son válidos de forma tal que nos permita comprender el razonamiento en el que se apoya el argumento. Empezamos con formas de argumento básicas, como el silogismo disyuntivo y el modus ponens. Después estas formas pueden combinarse para formar argumentos más complicados, como este:

(1) $\neg L \rightarrow (J \vee L)$
(2) $\neg L$
$\therefore$ J

Por modus ponens, (1) y (2) implican $J \vee L$. Esta es una *conclusión intermedia*. Se sigue lógicamente de las premisas, pero no es la conclusión que queremos. Ahora $J \vee L$ y (2) implican J, por silogismo disyuntivo. No necesitamos una nueva regla para este argumento. La demostración del argumento muestra que realmente no es más que una combinación de reglas que ya hemos presentado.

Formalmente, una DEMOSTRACIÓN es una secuencia de enunciados. Los primeros enunciados de la secuencia son asunciones; estas son las premisas del argumento. Cada uno de los enunciados posteriores de la secuencia se sigue de enunciados previos por una de las reglas de demostración. El enunciado final de la secuencia es la conclusión del argumento.

Este capítulo empieza con un sistema de demostración para la LE, que después se amplía para la LC y la LC con identidad.

6.1. Reglas básicas para la LE

Al diseñar un sistema de demostración, podríamos empezar simplemente con el silogismo disyuntivo y el modus ponens. Cada vez que descubriéramos un argumento válido que no pudiera demostrarse con las reglas que ya tuviéramos, podríamos introducir reglas nuevas. Avanzando de esta forma, tendríamos un cajón de sastre asistemático de reglas. Podríamos añadir reglas extrañas accidentalmente, y sin duda terminaríamos con más reglas de las necesarias.

En lugar de ello, lo que haremos será desarrollar lo que se conoce como sistema de DEDUCCIÓN NATURAL. En un sistema de deducción natural habrá dos reglas para cada operador lógico: una regla de INTRODUCCIÓN que nos permite demostrar un enunciado cuyo operador lógico principal es ese y una regla de ELIMINACIÓN que nos permite demostrar algo dado un enunciado cuyo operador lógico principal es ese.

Además de las reglas para cada operador lógico, también tendremos una regla de reiteración. Si ya has mostrado algo en el curso de una demostración, la regla de reiteración te permite repetirlo en una nueva línea. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \mathscr{A} & \\ 2 & \mathscr{A} & \text{R } 1 \end{array}$$

Cuando añadimos una línea a una demostración, escribimos la regla que justifica esa línea. También escribimos los números de las líneas a las que se ha aplicado la regla. La regla de reiteración anterior está justificada por una línea, la línea que se reitera. Así que 'R 1' en la línea 2 de la demostración significa que la línea está justificada por la regla de reiteración (R) aplicada a la línea 1.

Obviamente, la regla de reiteración no nos permitirá mostrar nada *nuevo*. Para eso necesitaremos más reglas. En el resto de esta sección se proporcionarán las reglas de introducción y eliminación de todas las conectivas de enunciados. Esto nos dará un sistema de demostración completo para la LE. Después, en este capítulo, introduciremos las reglas para los cuantificadores y la identidad.

Todas las reglas que se presentan en este capítulo están resumidas a partir de la p. 166.

Conjunción

Piensa por un momento: ¿qué tendrías que mostrar para demostrar $E \,\&\, F$?

Por supuesto, podrías mostrar $E \,\&\, F$ demostrando por separado E y F. Esto vale incluso aunque los dos términos de la conjunción no sean enunciados atómicos. Si puedes demostrar $[(A \vee J) \to V]$ y $[(V \to L) \leftrightarrow (F \vee N)]$, entonces de hecho has demostrado

$$[(A \vee J) \to V] \,\&\, [(V \to L) \leftrightarrow (F \vee N)].$$

Así que esta será nuestra regla de introducción de la conjunción, que abreviamos &I:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} \,\&\, \mathscr{B} & \&\text{I } m, n \end{array}$$

Una línea de demostración debe estar justificada por alguna regla, y aquí tenemos '&I m,n.'. Esto significa: introducción de la conjunción aplicada a la línea m y a la línea n. Estas son variables, no auténticos números de línea; m es alguna línea y n es alguna otra línea. En una demostración real, las líneas están numeradas $1, 2, 3, \ldots$ y las reglas deben aplicarse a números de línea específicos. No obstante, cuando definimos la regla, usamos variables para destacar la idea de que la regla puede aplicarse a dos líneas cualesquiera que ya estén en la demostración. Si tienes K en la línea 8 y L en la línea 15, puedes demostrar $(K \,\&\, L)$ en algún punto posterior de la demostración con la justificación '&I 8, 15'.

Ahora piensa en la regla de eliminación para la conjunción. ¿Qué puedes concluir a partir de un enunciado como $E \,\&\, F$? Sin duda, puedes concluir E; si $E \,\&\, F$ fuese verdadero, entonces E sería verdadero. Del mismo modo, puedes concluir F. Esta será nuestra regla de eliminación de la conjunción, que abreviamos &E:

m	$\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$	
	$\mathcal{A}$	&E m
	$\mathcal{B}$	&E m

Cuando tienes una conjunción en alguna línea de una demostración, puedes usar &E para derivar cualquiera de los términos de la conjunción. La regla &E solo requiere un enunciado, así que escribimos un número de línea como justificación para aplicarla.

Incluso con solo estas dos reglas, podemos proporcionar algunas demostraciones. Observa este argumento.

$$\begin{array}{rl} & [(A \lor B) \to (C \lor D)] \,\&\, [(E \lor F) \to (G \lor H)] \\ \therefore & [(E \lor F) \to (G \lor H)] \,\&\, [(A \lor B) \to (C \lor D)] \end{array}$$

El operador lógico principal tanto en la premisa como en la conclusión es la conjunción. Dado que la conjunción es simétrica, obviamente el argumento es válido. Para proporcionar una demostración, empezamos escribiendo la premisa. Después de las premisas, trazamos una línea horizontal, y todo lo que haya debajo de esta línea debe estar justificado por una regla de demostración. Así que el comienzo de la demostración es así:

1	$[(A \lor B) \to (C \lor D)] \,\&\, [(E \lor F) \to (G \lor H)]$	

A partir de la premisa podemos obtener cada uno de los términos de la conjunción por &E. La demostración ahora es así:

1	$[(A \lor B) \to (C \lor D)] \,\&\, [(E \lor F) \to (G \lor H)]$	
2	$[(A \lor B) \to (C \lor D)]$	&E 1
3	$[(E \lor F) \to (G \lor H)]$	&E 1

La regla &I requiere que cada uno de los términos de la conjunción esté disponible en alguna parte de la demostración. Pueden estar separados el uno del otro, y pueden aparecer en cualquier orden. Así que aplicando la regla &I a las líneas 3 y 2 llegamos a la conclusión deseada. La demostración terminada es así:

1	$[(A \vee B) \to (C \vee D)] \,\&\, [(E \vee F) \to (G \vee H)]$	
2	$[(A \vee B) \to (C \vee D)]$	&E 1
3	$[(E \vee F) \to (G \vee H)]$	&E 1
4	$[(E \vee F) \to (G \vee H)] \,\&\, [(A \vee B) \to (C \vee D)]$	&I 3, 2

Esta demostración es trivial, pero muestra cómo podemos usar las reglas de demostración conjuntamente para demostrar la validez de una forma de argumento. Además, si hubiéramos usado una tabla de verdad para mostrar que este argumento es válido habríamos necesitado la asombrosa cantidad de 256 líneas, dado que hay ocho letras de enunciado en el argumento.

Disyunción

Si M es verdadero, entonces $M \vee N$ también es verdadero. Así que la regla de introducción de la disyunción ($\vee$I) nos permite derivar una disyunción si tenemos uno de los dos términos.

m	$\mathcal{A}$	
	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I m
	$\mathcal{B} \vee \mathcal{A}$	$\vee$I m

Fíjate en que $\mathcal{B}$ puede ser *cualquier* enunciado. Así que la siguiente demostración es legítima:

1	M	
2	$M \vee ([(A \leftrightarrow B) \to (C \,\&\, D)] \leftrightarrow [E \,\&\, F])$	$\vee$I 1

Puede que parezca raro que simplemente sabiendo M podamos derivar una conclusión que incluye enunciados como A, B, y el resto —enunciados que no tienen nada que ver con M. Pero la conclusión se sigue inmediatamente por $\vee$I. Así es como debe ser: las condiciones de verdad de la disyunción implican que, si $\mathcal{A}$ es verdadero, entonces $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ es verdadero independientemente de lo que sea $\mathcal{B}$. Así que la conclusión no puede ser falsa si la premisa es verdadera; el argumento es válido.

Ahora piensa en la regla de eliminación de la disyunción. ¿Qué puedes concluir a partir de $M \vee N$? No puedes concluir M. Podría ser que fuese la verdad de M

lo que hace que $M \vee N$ sea verdadero, como en el ejemplo anterior, pero podría ser que no. Solo a partir de $M \vee N$ no puedes concluir nada específico sobre M ni sobre N. Sin embargo, si además supieras que N es falso, entonces podrías concluir M.

Esto no es más que el silogismo disyuntivo, y será la regla de eliminación de la disyunción ($\vee$E).

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\ n & \neg\mathcal{B} & \\ & \mathcal{A} & \vee\text{E } m, n \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\ n & \neg\mathcal{A} & \\ & \mathcal{B} & \vee\text{E } m, n \end{array}$$

Condicional

Observa este argumento:

$$\begin{array}{rl} & R \vee F \\ \therefore & \neg R \to F \end{array}$$

El argumento es ciertamente válido. ¿Cuál debe ser la regla de introducción del condicional para que podamos extraer esa conclusión?

Empezamos la demostración escribiendo la premisa del argumento y trazando una línea horizontal, así:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \underline{R \vee F} \end{array}$$

Si tuviéramos también la premisa $\neg R$, podríamos derivar F por la regla $\vee$E. Pero no tenemos $\neg R$ como premisa de este argumento ni podemos derivarlo directamente de la premisa que tenemos, así que no podemos demostrar F. En lugar de ello, lo que haremos es comenzar una *subdemostración*, una demostración dentro de la demostración principal. Cuando comenzamos una subdemostración, trazamos otra línea vertical para indicar que ya no estamos en la demostración principal. Después escribimos una asunción para la subdemostración. Puede ser cualquier cosa que queramos. Aquí será útil asumir $\neg R$. Nuestra demostración ahora tiene este aspecto:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \underline{R \vee F} \\ 2 & \quad \begin{array}{|l} \underline{\neg R} \end{array} \end{array}$$

Es importante darse cuenta de que no estamos afirmando que hayamos demostrado $\neg R$. No es necesario escribir ninguna justificación para la línea de la asunción de una subdemostración. Puedes pensar que es como si la subdemostración planteara la pregunta: ¿Qué se podría mostrar *si* $\neg R$ fuese verdadero? Podemos derivar F, así que lo hacemos:

$$
\begin{array}{l|l l l}
1 & R \vee F & & \\
\cline{2-2}
2 & & \neg R & \\
\cline{3-3}
3 & & F & \vee\text{E } 1, 2
\end{array}
$$

Esto muestra que *si* tuviéramos $\neg R$ como premisa, *entonces* podríamos demostrar F. A efectos prácticos, hemos demostrado $\neg R \to F$. Así que la regla de introducción del condicional ($\to$I) nos permitirá cerrar la subdemostración y derivar $\neg R \to F$ en la demostración principal. Nuestra demostración final es así:

$$
\begin{array}{l|l l l}
1 & R \vee F & & \\
\cline{2-2}
2 & & \neg R & \\
\cline{3-3}
3 & & F & \vee\text{E } 1, 2 \\
4 & \neg R \to F & & \to\text{I } 2\text{–}3
\end{array}
$$

Fíjate en que la justificación para aplicar la regla $\to$I es la subdemostración completa. Normalmente serán más de dos líneas.

Puede que parezca que la posibilidad de asumir absolutamente cualquier cosa en una subdemostración lleva al caos: ¿permite demostrar cualquier conclusión a partir de cualquier premisa? La respuesta es no. Observa esta demostración:

$$
\begin{array}{l|l l l}
1 & \mathcal{A} & & \\
\cline{2-2}
2 & & \mathcal{B} & \\
\cline{3-3}
3 & & \mathcal{B} & \text{R } 2
\end{array}
$$

Tal vez parezca que esto demuestre que se puede derivar cualquier conclusión $\mathcal{B}$ a partir de cualquier premisa $\mathcal{A}$. Pero, cuando termina la línea vertical de la subdemostración, la subdemostración está *cerrada*. Para completar una demostración debes cerrar todas las subdemostraciones. Y no se puede cerrar la subdemostración y usar la regla R de nuevo en la línea 4 para derivar $\mathcal{B}$ en la demostración principal. Cuando se cierra una demostración, ya no se puede hacer referencia a líneas concretas de su interior.

A la acción de cerrar una subdemostración se le llama *descargar* las asunciones de esa subdemostración. Así que podemos plantearlo de esta forma: no se puede completar una demostración hasta que se hayan descargado todas las asunciones aparte de las premisas originales del argumento.

Por supuesto, es legítimo hacer esto:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \mathcal{A} & \\
\cline{2-2}
2 & \quad \mid \mathcal{B} & \\
3 & \quad \mid \mathcal{B} & \text{R } 2 \\
4 & \mathcal{B} \to \mathcal{B} & \to\text{I } 2\text{–}3
\end{array}
$$

Pero esto no debería parecer tan extraño. Dado que $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ es una tautología, no se debería necesitar ninguna premisa en particular para derivarlo de forma válida. (De hecho, como veremos, una tautología se sigue de cualquier premisa.)

La formulación general de la regla $\to$I es así:

$$
\begin{array}{r|l l}
m & \quad \mid \mathcal{A} & \text{busco } \mathcal{B} \\
n & \quad \mid \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \to\text{I } m\text{–}n
\end{array}
$$

Cuando introducimos una subdemostración, normalmente escribimos lo que queremos derivar en la columna. Esto es solo para no olvidar por qué empezamos la subdemostración en caso de que se extienda hasta cinco o diez líneas. No hay una regla 'busco'. Es una nota para nosotros mismos y formalmente no es parte de la demostración.

Aunque siempre está permitido abrir una subdemostración con cualquier asunción que se quiera, la selección de una asunción útil implica algo de estrategia. Comenzar una subdemostración con una asunción arbitraria y absurda solo serviría para desperdiciar líneas de la demostración. Para derivar un condicional por $\to$I, por ejemplo, debes asumir el antecedente del condicional en una subdemostración.

La regla $\to$I también requiere que el consecuente del condicional sea la última línea de la subdemostración. Siempre está permitido cerrar una subdemostración y descargar sus asunciones, pero no resulta de ninguna ayuda hacerlo antes de obtener lo que se quiere.

Ahora piensa en la regla de eliminación del condicional. No se sigue nada solo de $M \to N$, pero si tenemos tanto $M \to N$ como M podemos concluir N. Esta regla, el modus ponens, será la regla de eliminación del condicional ($\to$E).

m	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
n	$\mathcal{A}$	
	$\mathcal{B}$	$\to$E m, n

Ahora que tenemos reglas para el condicional, observa este argumento:

$$\begin{array}{rl} & P \to Q \\ & Q \to R \\ \therefore & P \to R \end{array}$$

Empezamos la demostración escribiendo las dos premisas como asunciones. Dado que el operador lógico principal de la conclusión es un condicional, tendremos que usar la regla $\to$I. Para ello necesitamos una subdemostración, así que escribimos el antecedente del condicional como asunción de una subdemostración.

1	$P \to Q$	
2	$Q \to R$	
3	$\quad \mid P$	

Hemos conseguido que P esté disponible asumiéndola en una subdemostración, y ello nos permite usar $\to$E en la primera premisa. Esto nos da Q, lo que nos permite usar $\to$E en la segunda premisa. Una vez que hemos derivado R, cerramos la subdemostración. Al asumir P hemos podido demostrar R, así que aplicamos la regla $\to$I y terminamos la demostración.

1	$P \to Q$	
2	$Q \to R$	
3	$\quad \mid P$	busco R
4	$\quad \mid Q$	$\to$E 1, 3
5	$\quad \mid R$	$\to$E 2, 4
6	$P \to R$	$\to$I 3–5

Bicondicional

Las reglas para el bicondicional serán como versiones de doble sentido de las reglas del condicional.

Para derivar $W \leftrightarrow X$, por ejemplo, se debe demostrar X al asumir W *y* demostrar W al asumir X. La regla de introducción del bicondicional ($\leftrightarrow$I) requiere dos subdemostraciones. Pueden estar en cualquier orden, y la segunda subdemostración no tiene que estar inmediatamente después de la primera, pero esquemáticamente la regla funciona así:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
m & & \underline{\mathcal{A}} & \text{busco } \mathcal{B} \\
n & & \mathcal{B} & \\
p & & \underline{\mathcal{B}} & \text{busco } \mathcal{A} \\
q & & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & & \leftrightarrow\text{I } m\text{–}n,\ p\text{–}q
\end{array}
$$

La regla de eliminación del bicondicional ($\leftrightarrow$E) te permite hacer algo más que la regla del condicional. Si tienes el subenunciado izquierdo del bicondicional, puedes derivar el subenunciado de la derecha. Si tienes el subenunciado derecho, puedes derivar el subenunciado de la izquierda. Esta es la regla:

$$
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \leftrightarrow\text{E } m,\ n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \leftrightarrow\text{E } m,\ n
\end{array}
$$

Negación

Este es un argumento matemático simple en español:

> Asumamos que existe un número natural que es el mayor. Llamémoslo A.
> Ese número más uno también es un número natural.
> Obviamente, $A + 1 > A$. Así que hay un número natural mayor que A.
> Esto es imposible, ya que se asume que A es el mayor número natural.
> $\therefore$ No hay un número natural mayor.

Tradicionalmente, a esta forma de argumento se la llama *reductio*. Su nombre completo en latín es *reductio ad absurdum*, que significa 'reducción al absurdo'. En una reductio, asumimos algo en aras del argumento —por ejemplo, que existe el mayor número natural. Después mostramos que la asunción conduce a dos enunciados contradictorios —por ejemplo, que A es el mayor número natural y que no lo es. De esta manera, mostramos que la asunción original debe ser falsa.

Las reglas básicas de la negación permitirán argumentos como este: si asumimos algo y mostramos que lleva a enunciados contradictorios, entonces hemos demostrado la negación de la asunción. Esta es la regla de introducción de la negación ($\neg$I):

m	$\quad\mathcal{A}$	por reductio
n	$\quad\mathcal{B}$	
$n+1$	$\quad\neg\mathcal{B}$	
$n+2$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg$I m–$n+1$

Para poder aplicar la regla, las últimas dos líneas de la subdemostración deben ser una contradicción explícita: un enunciado seguido en la siguiente línea por su negación. Escribimos 'por reductio' como una nota para nosotros mismos, un recordatorio de para qué empezamos la subdemostración. Formalmente no es parte de la demostración y puedes omitirla si te resulta molesta.

Para ver cómo funciona esta regla, supón que queremos demostrar la ley de no contradicción: $\neg(G \& \neg G)$. Podemos demostrarla sin ninguna premisa, empezando directamente una subdemostración. Queremos aplicar $\neg$I a la subdemostración, así que asumimos $(G \& \neg G)$. Así obtenemos una contradicción explícita por &E. La demostración es así:

1	$\quad G \& \neg G$	por reductio
2	$\quad G$	&E 1
3	$\quad \neg G$	&E 1
4	$\neg(G \& \neg G)$	$\neg$I 1–3

La regla $\neg$E funcionará en gran parte de la misma forma. Si asumimos $\neg\mathcal{A}$ y mostramos que lleva a una contradicción, hemos demostrado $\mathcal{A}$. Así que la regla es así:

m	$\quad\neg\mathcal{A}$	por reductio
n	$\quad\mathcal{B}$	
$n+1$	$\quad\neg\mathcal{B}$	
$n+2$	$\mathcal{A}$	$\neg$E m–$n+1$

6.2. Reglas derivadas

Las reglas del sistema de deducción natural pretenden ser sistemáticas. Hay una regla de introducción y una regla de eliminación para cada uno de los operadores lógicos, pero ¿por qué esas reglas básicas y no otras? Muchos sistemas de deducción natural tienen una regla de eliminación de la disyunción que funciona así:

m	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
n	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	
o	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	
	$\mathcal{C}$	DIL m, n, o

Llamemos a esto regla del dilema (DIL). Puede parecer que con nuestro sistema de demostración no podremos hacer algunas demostraciones, porque no tenemos esto como regla básica. Pero ese no es el caso. Cualquier demostración que se pueda hacer usando la regla del dilema se puede hacer con las reglas básicas de nuestro sistema de deducción natural. Observa esta demostración:

1	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
2	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	
3	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	busco $\mathcal{C}$
4	$\quad \neg\mathcal{C}$	por reductio
5	$\quad\quad \mathcal{A}$	por reductio
6	$\quad\quad \mathcal{C}$	$\to$E 2, 5
7	$\quad\quad \neg\mathcal{C}$	R 4
8	$\quad \neg\mathcal{A}$	$\neg$I 5–7
9	$\quad\quad \mathcal{B}$	por reductio
10	$\quad\quad \mathcal{C}$	$\to$E 3, 9
11	$\quad\quad \neg\mathcal{C}$	R 4
12	$\quad \mathcal{B}$	$\vee$E 1, 8
13	$\quad \neg\mathcal{B}$	$\neg$I 9–11
14	$\mathcal{C}$	$\neg$E 4–13

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{C}$ son metavariables. No son símbolos de la LE, sino que representan enunciados arbitrarios de la LE. Así que, estrictamente hablando, esto no es una demostración en LE. Es más como una receta. Proporciona un patrón que puede demostrar cualquier cosa que la regla del dilema pueda demostrar, usando solo las reglas básicas de la LE. Esto significa que realmente la regla del dilema no es necesaria. Si la añadimos a la lista de reglas básicas, eso no nos permitirá derivar nada que no pudiéramos derivar sin ella.

No obstante, sería conveniente tener la regla del dilema. Nos permitiría hacer en una línea lo que, con las reglas básicas, requiere once líneas y varias subdemostraciones unas dentro de otras. Así que la añadiremos al sistema de demostración como regla derivada.

Una REGLA DERIVADA es una regla de demostración que no hace que sean posibles nuevas demostraciones. Todo lo que pueda ser demostrado con una regla derivada puede ser demostrado sin ella. Puedes considerar una demostración corta que usa una regla derivada como una abreviatura de una demostración más larga que solo usa las reglas básicas. Cuando uses la regla del dilema, siempre podrías usar diez líneas más para demostrar lo mismo sin ella.

Por comodidad, añadiremos otras reglas derivadas más. Una es el *modus tollens* (MT).

m	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
n	$\neg\mathcal{B}$	
	$\neg\mathcal{A}$	MT m, n

Dejamos como ejercicio la demostración de esta regla. Fíjate en que, si ya hubiéramos demostrado la regla MT, podríamos haber demostrado la regla DIL en solo cinco líneas.

Añadimos también el silogismo hipotético (SH) como regla derivada. Ya lo hemos demostrado en la p. 119.

m	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
n	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	
	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	SH m, n

6.3. Reglas de sustitución

Piensa en cómo demostrarías este argumento: $F \to (G \,\&\, H)$, $\therefore$ $F \to G$

Tal vez resulte tentador escribir la premisa y aplicar la regla &E a la conjunción $(G \,\&\, H)$. Sin embargo, esto no está permitido, pues las reglas básicas de demostración solo pueden aplicarse a enunciados completos. Necesitamos tener $(G \,\&\, H)$ separado en una línea. Podemos demostrar el argumento de esta manera:

1	$F \to (G \& H)$	
2	$\quad F$	busco G
3	$\quad G \& H$	$\to$E 1, 2
4	$\quad G$	&E 3
5	$F \to G$	$\to$I 2–4

Ahora introduciremos algunas reglas derivadas que pueden aplicarse a partes de un enunciado. Estas reglas se llaman REGLAS DE SUSTITUCIÓN porque pueden usarse para sustituir una parte de un enunciado por una expresión lógicamente equivalente. Una regla de sustitución simple es la conmutatividad (abreviada Con), que dice que podemos intercambiar el orden de los términos de una conjunción o de una disyunción. Definimos la regla de esta forma:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \& \mathcal{B}) &\iff (\mathcal{B} \& \mathcal{A}) \\ (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) &\iff (\mathcal{B} \vee \mathcal{A}) \\ (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) &\iff (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A}) \quad \text{Con} \end{aligned}$$

La flecha gruesa significa que se puede tomar la subfórmula de uno de los lados de la flecha y sustituirla por la subfórmula del otro lado. La flecha es doble porque las reglas de sustitución funcionan en ambos sentidos.

Observa este argumento: $(M \vee P) \to (P \& M)$, $\therefore$ $(P \vee M) \to (M \& P)$

Es posible demostrarlo usando únicamente las reglas básicas, pero sería largo y arduo. Con la regla Con podemos proporcionar fácilmente una demostración:

1	$(M \vee P) \to (P \& M)$	
2	$(P \vee M) \to (P \& M)$	Con 1
3	$(P \vee M) \to (M \& P)$	Con 2

Otra regla de sustitución es la doble negación (DN). Con la regla DN, se puede eliminar o insertar un par de negaciones en cualquier parte de un enunciado. Esta es la regla:

$$\neg\neg\mathcal{A} \iff \mathcal{A} \quad \text{DN}$$

Otras dos reglas de sustitución son las llamadas Leyes de De Morgan, nombradas así por el lógico del siglo XIX Augustus De Morgan. (Aunque De Morgan sí que descubrió estas leyes, no fue el primero en hacerlo.) Las reglas capturan relaciones útiles entre la negación, la conjunción y la disyunción. Estas son las reglas, que abreviamos DeM:

$$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{B})$$
$$\neg(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \quad \text{DeM}$$

Dado que $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un *condicional material*, es equivalente a $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Hay otra regla de sustitución que captura esta equivalencia. Abreviamos esta regla como CM, de 'condicional material'. Tiene dos formas:

$$(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \quad \text{CM}$$

Ahora observa este argumento: $\neg(P \to Q)$, $\therefore$ $P \,\&\, \neg Q$

Como siempre, podríamos demostrar este argumento usando solo las reglas básicas. Pero con las reglas de sustitución la demostración es mucho más simple:

1	$\neg(P \to Q)$	
2	$\neg(\neg P \vee Q)$	CM 1
3	$\neg\neg P \,\&\, \neg Q$	DeM 2
4	$P \,\&\, \neg Q$	DN 3

Una última regla de sustitución es la que captura la relación entre los condicionales y los bicondicionales. Llamaremos a esta regla cambio del bicondicional y la abreviamos $\leftrightarrow$c.

$$[(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{B} \to \mathcal{A})] \Longleftrightarrow (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \quad \leftrightarrow\text{c}$$

6.4. Reglas de los cuantificadores

Para las demostraciones en la LC, usamos todas las reglas básicas de la LE más cuatro reglas básicas nuevas: reglas de introducción y de eliminación para cada uno de los cuantificadores.

Dado que todas las reglas derivadas de la LE se derivan de las reglas básicas, también valdrán para la LC. Añadiremos otra regla derivada, una regla de sustitución llamada negación del cuantificador.

Casos de sustitución

Para formular de manera concisa las reglas de los cuantificadores necesitamos una forma de señalar la relación entre los enunciados cuantificados y sus casos particulares. Por ejemplo, el enunciado Pa es un caso particular de la afirmación general $\forall xPx$.

Para una fbf $\mathcal{A}$, una constante c, y una variable x, definimos $\mathcal{A}\boxed{\chi\Rightarrow c}$ como la fbf que se obtiene al sustituir todas las ocurrencias de x en $\mathcal{A}$ por c.

A $\mathcal{A}\boxed{\chi\Rightarrow c}$ se le llama CASO DE SUSTITUCIÓN de $\forall x\mathcal{A}$ y $\exists x\mathcal{A}$, y a c se le llama CONSTANTE DE EJEMPLIFICACIÓN.

- $Aa \rightarrow Ba$, $Af \rightarrow Bf$ y $Ak \rightarrow Bk$ son casos de sustitución de $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$; las constantes de ejemplificación son a, f, and k respectivamente.

- Raj, Rdj y Rjj son casos de sustitución de $\exists zRzj$; las constantes de ejemplificación son a, d, y j respectivamente.

Eliminación del universal

Si tienes $\forall xAx$, es legítimo inferir que cualquier cosa es un A. Puedes inferir Aa, Ab, Az, Ad_3. Es decir, puedes inferir cualquier caso de sustitución —en pocas palabras, puedes inferir Ac para cualquier constante c. Esta es la forma general de la regla de eliminación del universal ($\forall$E):

$$\begin{array}{l|ll}
m & \forall\chi\mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A}\boxed{\chi\Rightarrow c} & \forall\text{E } m
\end{array}$$

Recuerda que el cuadro de un caso de sustitución no es un símbolo de la LC, así que no puedes escribir eso directamente en una demostración. Lo que se hace es escribir el enunciado sustituido, donde se sustituyen todas las ocurrencias de la variable χ en $\mathcal{A}$ por la constante c. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l|ll}
1 & \forall x(Mx \rightarrow Rxd) & \\
\hline
2 & Ma \rightarrow Rad & \forall\text{E } 1 \\
3 & Md \rightarrow Rdd & \forall\text{E } 1
\end{array}$$

Introducción del existencial

¿Cuándo es legítimo inferir $\exists x Ax$? Cuando sabes que algo es un A —por ejemplo, si Aa está disponible en la demostración.

Esta es la regla de introducción del existencial ($\exists$I):

m	$\mathcal{A}$	
	$\exists \chi \mathcal{A}\boxed{\boxed{\chi \Rightarrow c}}$	$\exists$I m

Es importante fijarse en que $\mathcal{A}\boxed{\boxed{\chi \Rightarrow c}}$ no es necesariamente un caso de sustitución. Lo escribimos con un cuadro doble para mostrar que la variable χ no tiene que sustituir a todas las ocurrencias de la constante c. Puedes decidir qué ocurrencias sustituir y cuáles dejar. Por ejemplo:

1	$Ma \to Rad$	
2	$\exists x(Ma \to Rax)$	$\exists$I 1
3	$\exists x(Mx \to Rxd)$	$\exists$I 1
4	$\exists x(Mx \to Rad)$	$\exists$I 1
5	$\exists y \exists x(Mx \to Ryd)$	$\exists$I 4
6	$\exists z \exists y \exists x(Mx \to Ryz)$	$\exists$I 5

Introducción del universal

Una afirmación universal como $\forall x Px$ sería demostrada si todos sus casos de sustitución se demostrasen, si todos los enunciados Pa, Pb, ... estuvieran disponibles en una demostración. Pero, por desgracia, no hay ninguna posibilidad de demostrar ***todos*** los casos de sustitución. Para eso se necesitaría demostrar Pa, Pb, ..., Pj_2, ..., Ps_7, ..., y así hasta el infinito. Hay infinitas constantes en la LC, así que este proceso no terminaría nunca.

Piensa en un argumento simple: $\forall x Mx$, $\therefore$ $\forall y My$

No hay ninguna diferencia en el significado del enunciado tanto si usamos la variable x como si usamos la variable y, así que obviamente este argumento es válido. Supón que empezamos así:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x Mx & \text{busco } \forall y My \\ \cline{2-2}
2 & Ma & \forall\text{E } 1
\end{array}$$

Hemos derivado Ma. Nada nos impide usar la misma justificación para derivar Mb, …, Mj_2, …, Ms_7, …, y así hasta que nos quedemos sin espacio o sin paciencia. Hemos mostrado la manera de demostrar $M\mathscr{c}$ para cualquier constante $\mathscr{c}$. De esto se sigue $\forall y My$.

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x Mx & \\ \cline{2-2}
2 & Ma & \forall\text{E } 1 \\
3 & \forall y My & \forall\text{I } 2
\end{array}$$

Aquí es importante que a sea alguna constante arbitraria. No hemos asumido nada especial sobre ella. Si Ma fuera una de las premisas del argumento, entonces eso no mostraría nada sobre *todos* los y. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x Rxa & \\ \cline{2-2}
2 & Raa & \forall\text{E } 1 \\
3 & \forall y Ryy & \text{¡no permitido!}
\end{array}$$

Esta es la forma esquemática de la regla de introducción del universal ($\forall$I):

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} & \\
 & \forall \mathscr{x} \mathscr{A}\boxed{\mathscr{c}^* \Rightarrow \mathscr{x}} & \forall\text{I } m
\end{array}$$

* La constante $\mathscr{c}$ no debe ocurrir en ninguna asunción no descargada.

Fíjate en que podemos hacer esto con cualquier constante que no ocurra en una asunción que no esté descargada y con cualquier variable.

Fíjate también en que la constante no puede ocurrir en ninguna asunción *no descargada*, pero puede ocurrir en la asunción de una subdemostración que ya hemos cerrado. Por ejemplo, podemos demostrar $\forall z(Dz \to Dz)$ sin ninguna premisa.

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & & Df & \text{busco } Df \\ \cline{3-3}
2 & & Df & \text{R } 1 \\
3 & \multicolumn{2}{l}{Df \to Df} & \to\text{I } 1\text{–}2 \\
4 & \multicolumn{2}{l}{\forall z(Dz \to Dz)} & \forall\text{I } 3
\end{array}$$

Eliminación del existencial

Un enunciado con un cuantificador existencial nos dice que hay *algún* miembro del UD que satisface una fórmula. Por ejemplo, $\exists x Sx$ nos dice (a grandes rasgos) que hay al menos un S. Sin embargo, no nos dice *qué* miembro del UD satisface S. No podemos concluir inmediatamente Sa, Sf_{23}, o cualquier otro caso de sustitución del enunciado. ¿Qué podemos hacer?

Supón que supiéramos tanto $\exists x Sx$ como $\forall x(Sx \rightarrow Tx)$. Podríamos razonar de esta forma:

> Dado que tenemos $\exists x Sx$, hay algo que es un S. No sabemos qué constantes se refieren a ese objeto, si alguna lo hace, así que llamémoslo 'Ishmael'. A partir de $\forall x(Sx \rightarrow Tx)$, se sigue que si Ishmael es un S entonces es un T. Por lo tanto, Ishmael es un T. Puesto que Ishmael es un T, sabemos que $\exists x Tx$.

En este párrafo hemos introducido un nombre para la cosa que es un S. Le hemos dado un nombre arbitrario ('Ishmael') para que pudiéramos razonar sobre él y derivar algunas consecuencias de que hubiera un S. Dado que 'Ishmael' no es más que un nombre ficticio que hemos introducido para poder hacer la demostración y no una auténtica constante, no podemos mencionarlo en la conclusión. Pero podemos derivar un enunciado que no mencione a Ishmael; es decir, $\exists x Tx$. Este enunciado sí que se sigue de las dos premisas.

Nos interesa que la regla de eliminación del existencial funcione de forma similar. Pero, dado que las palabras como 'Ishmael' no son símbolos de la LC, no podemos usarlas en las demostraciones formales. En lugar de ello, usaremos constantes de la LC que no hayan aparecido antes en la demostración.

Una constante que se usa para que represente lo que sea que satisface una afirmación existencial se llama TESTIGO. El razonamiento con un testigo debe ocurrir dentro de una subdemostración, y el testigo no puede ser una constante que esté en uso en cualquier otra parte de la demostración.

Esta es la forma esquemática de la regla de eliminación del existencial ($\exists$E):

$$\begin{array}{l|l l}
m & \exists \chi \mathcal{A} & \\
n & \quad \mathcal{A} \boxed{c^* \Rightarrow \chi} & \\
\hline
p & \quad \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{B} & \exists\text{E } m,\ n\text{–}p
\end{array}$$

* La constante no debe aparecer fuera de la subdemostración.

Recuerda que el testigo no puede aparecer en $\mathcal{B}$, el enunciado que se demuestra usando $\exists$E.

Sería suficiente establecer el requerimiento de que la constante testigo no apareciera en $\exists\chi\mathcal{A}$, en $\mathcal{B}$, o en cualquier asunción no descargada. Pero, en reconocimiento del hecho de que solo es un parámetro que usamos en la subdemostración, establecemos el requerimiento de una constante completamente nueva que no aparezca en ninguna otra parte de la demostración.

Con esta regla, podemos dar una demostración formal de que $\exists xSx$ y $\forall x(Sx \to Tx)$ conjuntamente implican $\exists xTx$.

1	$\exists xSx$	
2	$\forall x(Sx \to Tx)$	busco $\exists xTx$
3	$\quad Sa$	
4	$\quad Sa \to Ta$	$\forall$E 2
5	$\quad Ta$	$\to$E 3, 4
6	$\quad \exists xTx$	$\exists$I 5
7	$\exists xTx$	$\exists$E 1, 3–6

Fíjate en que esto tiene en realidad la misma estructura que el argumento en español con el que empezamos, excepto que la subdemostración usa el testigo 'a' en lugar del nombre ficticio 'Ishmael'.

Negación del cuantificador

Al traducir de español a la LC, señalábamos que $\neg\exists x\neg\mathcal{A}$ es lógicamente equivalente a $\forall x\mathcal{A}$. En la LC, es demostrable que son equivalentes. Podemos demostrar una mitad de la equivalencia con una demostración un tanto fea:

1	$\forall x Ax$	busco $\neg\exists x \neg Ax$
2	$\quad \exists x \neg Ax$	por reductio
3	$\quad\quad \neg Ac$	por $\exists$E
4	$\quad\quad\quad \forall x Ax$	por reductio
5	$\quad\quad\quad Ac$	$\forall$E 1
6	$\quad\quad\quad \neg Ac$	R 3
7	$\quad\quad \neg\forall x Ax$	$\neg$I 4–6
8	$\quad \forall x Ax$	R 1
9	$\quad \neg\forall x Ax$	$\exists$E 3–7
10	$\neg\exists x \neg Ax$	$\neg$I 2–9

Para mostrar que los dos enunciados son genuinamente equivalentes, necesitamos una segunda demostración que asuma $\neg\exists x \neg \mathcal{A}$ y derive $\forall x \mathcal{A}$. Dejamos esa demostración como ejercicio para el lector.

A menudo será útil traducir entre cuantificadores añadiendo o quitando negaciones de esta manera, así que añadimos dos reglas derivadas con este propósito. Estas reglas se llaman negación del cuantificador (NC):

$$\begin{array}{l} \neg\forall \chi \mathcal{A} \Longleftrightarrow \exists \chi \neg \mathcal{A} \\ \neg\exists \chi \mathcal{A} \Longleftrightarrow \forall \chi \neg \mathcal{A} \quad \text{NC} \end{array}$$

Dado que NC es una regla de sustitución, puede usarse en enunciados completos o en subfórmulas.

6.5. Reglas de la identidad

El predicado de identidad no forma parte de la LC, pero lo añadimos cuando necesitamos simbolizar ciertos enunciados. Para las demostraciones que involucren la identidad, añadimos dos reglas de demostración.

Supón que sabemos que muchas de las cosas que son verdaderas de a también son verdaderas de b. Por ejemplo: $Aa \,\&\, Ab$, $Ba \,\&\, Bb$, $\neg Ca \,\&\, \neg Cb$, $Da \,\&\, Db$, $\neg Ea \,\&\, \neg Eb$, etc. Esto no sería suficiente para justificar la conclusión $a = b$. (Ver p. 96.) En general, no hay ningún enunciado que no contenga ya el predicado de identidad y que pueda justificar la conclusión $a = b$. Esto implica que la regla de introducción de la identidad no justificará $a = b$ ni ninguna otra afirmación de identidad que contenga dos constantes diferentes.

No obstante, siempre es verdadero que $a = a$. En general, no se requiere ninguna premisa para concluir que algo es idéntico a sí mismo. Así que esta será la regla de introducción de la identidad, abreviada =I:

$$\mathcal{c} = \mathcal{c} \qquad =\mathrm{I}$$

Fíjate en que la regla =I no requiere una referencia a ninguna línea anterior de la demostración. Para cualquier constante $\mathcal{c}$, se puede escribir $\mathcal{c} = \mathcal{c}$ en cualquier punto simplemente con la regla =I como justificación.

Si se ha mostrado que $a = b$, entonces cualquier cosa que sea verdadera de a debe ser verdadera también de b. En cualquier enunciado que contenga a, se puede sustituir alguna o todas las ocurrencias de a por b para crear un enunciado equivalente. Por ejemplo, si ya sabes que Raa, entonces está justificado que concluyas Rab, Rba, Rbb. Recuerda que $\mathcal{A}\boxed{\boxed{a \Rightarrow b}}$ es el enunciado que resulta al sustituir a por b en $\mathcal{A}$. Esto no es lo mismo que un caso de sustitución, porque b puede sustituir a alguna o a todas las ocurrencias de a. La regla de eliminación de la identidad (=E) justifica que se sustituyan unos términos por otros que sean idénticos a ellos:

m	$a = b$	
n	$\mathcal{A}$	
	$\mathcal{A}\boxed{\boxed{a \Rightarrow b}}$	=E m, n
	$\mathcal{A}\boxed{\boxed{b \Rightarrow a}}$	=E m, n

Para ver las reglas en acción, observa esta demostración:

1	$\forall x \forall y\ x = y$	
2	$\exists x Bx$	
3	$\forall x(Bx \to \neg Cx)$	busco $\neg\exists x Cx$
4	$\quad Be$	
5	$\quad \forall y\ e = y$	$\forall$E 1
6	$\quad e = f$	$\forall$E 5
7	$\quad Bf$	$=$E 6, 4
8	$\quad Bf \to \neg Cf$	$\forall$E 3
9	$\quad \neg Cf$	$\to$E 8, 7
10	$\neg Cf$	$\exists$E 2, 4–9
11	$\forall x \neg Cx$	$\forall$I 10
12	$\neg\exists x Cx$	NC 11

6.6. Estrategias de demostración

No hay una receta simple para las demostraciones y no hay nada que pueda sustituir a la práctica. Pero aquí hay algunas reglas prácticas y estrategias que conviene tener en mente.

Retrocede a partir de lo que buscas. El objetivo final es derivar la conclusión. Mira la conclusión y pregúntate cuál es la regla de introducción del operador lógico principal. Esto te da una idea de qué debería ocurrir *justo antes* de la última línea de la demostración. Después puedes tratar esa línea como si fuera tu objetivo. Pregúntate qué podrías hacer para derivar ese nuevo objetivo.

Por ejemplo: Si tu conclusión es un condicional $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, piensa en usar la regla $\to$I. Para ello se requiere empezar una demostración en la que se asume $\mathcal{A}$. En la subdemostración se busca derivar $\mathcal{B}$.

Avanza a partir de lo que tienes. Cuando comiences una demostración, mira las premisas; después, mira los enunciados que has derivado hasta ese momento. Piensa en las reglas de eliminación de los operadores principales de esos enunciados. Ellas te dirán cuáles son tus opciones.

Por ejemplo: Si tienes $\forall x \mathcal{A}$, piensa en ejemplificarlo con alguna constante que pueda ser útil. Si tienes $\exists x\mathcal{A}$ y pretendes usar la regla $\exists$E, entonces debes asumir $\mathcal{A}[c|x]$ para alguna c que no esté en uso y después derivar una conclusión que no contenga c.

En una demostración corta, podrías ser capaz de eliminar las premisas e introducir la conclusión. Una demostración larga formalmente no es más que la unión de un cierto número de demostraciones cortas, así que puedes llenar los huecos retrocediendo desde la conclusión y avanzando desde las premisas alternativamente.

Cambia lo que ves. A menudo las reglas de sustitución pueden hacer tu vida más fácil. Si una demostración parece imposible, prueba algunas sustituciones diferentes.

Por ejemplo: A menudo es difícil demostrar una disyunción usando las reglas básicas. Si se quiere mostrar $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, a menudo es más fácil mostrar $\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y usar la regla CM.

Mostrar $\neg\exists x\mathcal{A}$ también puede ser difícil, y a menudo es más fácil mostrar $\forall x\neg\mathcal{A}$ y usar la regla NC.

Algunas reglas de sustitución deberían convertirse en tu segunda naturaleza. Por ejemplo, si ves una disyunción negada, deberías pensar inmediatamente en la regla de De Morgan.

No olvides la demostración indirecta. Si no puedes encontrar la forma de mostrar algo directamente, inténtalo asumiendo su negación.

Recuerda que la mayoría de las demostraciones pueden hacerse o directa o indirectamente. Una de las maneras puede que sea más fácil —o quizá una de ellas estimula tu imaginación más que la otra— pero cualquiera de las dos es formalmente legítima.

Repite las veces que sea necesario. Cuando hayas decidido cómo podrías llegar a la conclusión, pregúntate qué podrías hacer con las premisas. Después piensa de nuevo en los enunciados que buscas y pregúntate cómo podrías llegar a ellos.

Persiste. Intenta diferentes cosas. Si un enfoque falla, prueba alguna otra cosa.

6.7. Conceptos de teoría de la demostración

Usaremos el símbolo '$\vdash$' para indicar que una demostración es posible. Observa que no es el mismo símbolo que usábamos para representar la implicación semántica ($\models$) en el capítulo 5.

Cuando escribimos $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\} \vdash \mathcal{B}$, esto significa que es posible proporcionar una demostración de $\mathcal{B}$ con las premisas $\mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2$,.... Cuando solo tenemos una premisa omitimos las llaves, así que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ significa que hay una demostración de $\mathcal{B}$ con $\mathcal{A}$ como premisa. Naturalmente, $\vdash \mathcal{C}$ significa que hay una demostración de $\mathcal{C}$ que no tiene ninguna premisa.

A menudo las demostraciones lógicas se llaman *derivaciones*. Así que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ puede leerse como '$\mathcal{B}$ es derivable de $\mathcal{A}$'.

Un TEOREMA es un enunciado que puede derivarse de cualquier premisa; es decir, $\mathcal{T}$ es un teorema si y solo si $\vdash \mathcal{T}$.

No es demasiado difícil demostrar que algo es un teorema —solo hay que proporcionar una demostración de ello. ¿Cómo se podría mostrar que algo *no* es un teorema? Si su negación es un teorema, entonces puedes proporcionar una demostración. Por ejemplo, es fácil demostrar $\neg(Pa \,\&\, \neg Pa)$, lo que muestra que $(Pa \,\&\, \neg Pa)$ no puede ser un teorema. Sin embargo, con un enunciado que no es ni un teorema ni la negación de un teorema, no hay una manera fácil de mostrarlo. Tendrías que demostrar no solo que ciertas estrategias de demostración no sirven, sino que no es posible ninguna demostración. Incluso aunque no consiguieras demostrar un enunciado después de intentarlo de mil maneras diferentes, la prueba podría ser demasiado larga y compleja para poder descubrirla.

Dos enunciados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son DEMOSTRABLEMENTE EQUIVALENTES si y solo si cada uno puede ser derivado del otro; es decir, si $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$.

Es relativamente fácil mostrar que dos enunciados son demostrablemente equivalentes —solo hacen falta un par de demostraciones. Mostrar que los enunciados *no* son demostrablemente equivalentes es mucho más difícil. Es igual de difícil que mostrar que un enunciado no es un teorema. (De hecho, estos problemas son intercambiables. ¿Puedes pensar en un enunciado que sería un teorema si y solo si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fueran demostrablemente equivalentes?)

El conjunto de enunciados $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\}$ es DEMOSTRABLEMENTE INCONSISTENTE si y solo si se puede derivar una contradicción a partir de él; es decir, si para algún enunciado $\mathcal{B}$, $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\} \vdash \mathcal{B}$ y $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\} \vdash \neg\mathcal{B}$.

Es fácil mostrar que un conjunto es demostrablemente inconsistente. Solo hay que asumir los enunciados del conjunto y demostrar una contradicción. Mostrar que un conjunto *no* es demostrablemente inconsistente es mucho más difícil. Es necesario algo más que proporcionar una o dos demostraciones; requiere mostrar que cierto tipo de demostraciones son *imposibles*.

6.8. Demostraciones y modelos

Como ya sospecharás, hay una conexión entre *teoremas* y *tautologías*.

Hay una manera formal de mostrar que un enunciado es un teorema: demostrarlo. Podemos comprobar si cada una de las líneas se sigue por la regla citada. Puede que sea difícil hacer una demostración de veinte líneas, pero no es tan difícil comprobar cada una de las líneas de la demostración y confirmar que es legítima —y si cada una de las líneas de la demostración es legítima, entonces la demostración entera es legítima. Sin embargo, para mostrar que un enunciado es una tautología es necesario razonar en español sobre todos los modelos posibles. No hay un método formal de comprobar que el razonamiento es correcto. Si podemos elegir entre mostrar que un enunciado es un teorema y mostrar que es una tautología, sería más fácil mostrar que es un teorema.

A la inversa, no hay un método formal de mostrar que un enunciado *no* es un teorema. Es necesario razonar en español sobre todas las demostraciones posibles. Pero hay un método formal para mostrar que un enunciado no es una tautología. Solo es necesario construir un modelo en el que el enunciado sea falso. Si podemos elegir entre mostrar que un enunciado no es un teorema y mostrar que no es una tautología, sería más fácil mostrar que no es una tautología.

Afortunadamente, un enunciado es un teorema si y solo si es una tautología. Si proporcionamos una demostración de $\vdash \mathcal{A}$ y mostramos así que es un teorema, se sigue que $\mathcal{A}$ es una tautología; es decir, $\models \mathcal{A}$. Del mismo modo, si construimos un modelo en el que $\mathcal{A}$ sea falso y mostramos así que no es una tautología, se sigue que $\mathcal{A}$ no es un teorema.

En general, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ si y solo si $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$. De este modo:

- Un argumento es *válido* si y solo si *la conclusión es derivable de las premisas*.
- Dos enunciados son *lógicamente equivalentes* si y solo si son *demostrablemente equivalentes*.
- Un conjunto de enunciados es *consistente* si y solo si *no* es *demostrablemente inconsistente*.

Puedes decidir cuándo pensar en términos de demostraciones y cuándo pensar en términos de modelos, haciendo lo que te resulte más fácil para la tarea en

	SÍ	NO
¿Es $\mathcal{A}$ una tautología?	demostrar $\vdash \mathcal{A}$	dar un modelo en el que $\mathcal{A}$ sea falso
¿Es $\mathcal{A}$ una contradicción?	demostrar $\vdash \neg\mathcal{A}$	dar un modelo en el que $\mathcal{A}$ sea verdadero
¿Es $\mathcal{A}$ contingente?	dar un modelo en el que $\mathcal{A}$ sea verdadero y otro en el que $\mathcal{A}$ sea falso	demostrar $\vdash \mathcal{A}$ o $\vdash \neg\mathcal{A}$
¿Son equivalentes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$?	demostrar $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$	dar un modelo en el que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tengan diferentes valores de verdad
¿Es consistente el conjunto $\mathbb{A}$?	dar un modelo en el que todos los enunciados de $\mathbb{A}$ sean verdaderos	tomando los enunciados de $\mathbb{A}$, demostrar $\mathcal{B}$ y $\neg\mathcal{B}$
¿Es válido el argumento '$\mathcal{P}$, $\therefore$ $\mathcal{C}$'?	demostrar $\mathcal{P} \vdash \mathcal{C}$	dar un modelo en el que $\mathcal{P}$ sea verdadero y $\mathcal{C}$ sea falso

Tabla 6.1: A veces es más fácil mostrar algo proporcionando demostraciones que proporcionando modelos. A veces es al contrario. Depende de lo que estés intentando mostrar.

cuestión. La tabla 6.1 muestra un resumen de cuándo es mejor dar demostraciones y cuándo es mejor dar modelos.

De esta manera, las demostraciones y los modelos nos proporcionan un versátil juego de herramientas para trabajar con argumentos. Si se puede traducir un argumento a la LC, entonces podemos medir su valor lógico de una manera puramente formal. Si es deductivamente válido, podemos proporcionar una demostración formal; si es inválido, podemos proporcionar un contraejemplo formal.

6.9. Corrección y completitud

Este juego de herramientas es increíblemente útil. También es intuitivo, porque parece natural que la demostrabilidad y la implicación semántica coincidan. Pero que no te engañe la semejanza entre los símbolos '$\models$' y '$\vdash$'. El hecho de que sean realmente intercambiables no es algo simple de demostrar.

¿Por qué deberíamos pensar que un argumento que *puede demostrarse* es necesariamente un argumento *válido*? Esto es, ¿por qué pensar que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$?

Este es el problema de la CORRECCIÓN. Un sistema de demostración es CORRECTO si no hay demostraciones de argumentos inválidos. Para demostrar que el sistema de demostración es correcto es necesario mostrar que *cualquier* demostración posible es la demostración de un argumento válido. No sería suficiente simplemente con tener éxito al intentar demostrar muchos argumentos válidos y fallar al intentar demostrar argumentos inválidos.

Afortunadamente, hay una manera de enfocarlo de manera que pueda hacerse paso a paso. Si al usar la regla &E en la última línea de una demostración nunca se puede convertir un argumento válido en uno inválido, entonces al usar la regla muchas veces el argumento tampoco se vuelve inválido. Igualmente, si al usar las reglas &E y $\vee$E individualmente en la última línea de una demostración nunca se puede convertir un argumento válido en uno inválido, entonces al usarlas en combinación tampoco.

La estrategia consiste en mostrar, para cada una de las reglas de inferencia, que ella sola no puede convertir un argumento válido en uno inválido. Se sigue que las reglas usadas en combinación no convertirían un argumento válido en uno inválido. Dado que una demostración no es más que una serie de líneas, cada una justificada por una regla de inferencia, esto mostraría que todo argumento demostrable es válido.

Piensa, por ejemplo, en la regla &I. Supón que la usamos para añadir $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ a un argumento válido. Para poder aplicar la regla, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ deben estar ya disponibles en la demostración. Dado que el argumento es válido hasta ahora, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son o bien premisas del argumento o consecuencias válidas de las premisas. Por tanto, cualquier modelo en el que las premisas sean verdaderas debe ser un modelo en el que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean verdaderos. De acuerdo con la definición de VERDAD EN LA LC, esto significa que $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ también es verdadero en tal modelo. Por lo tanto, $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ se sigue con validez de las premisas. Esto significa que el hecho de usar la regla &I para ampliar una demostración válida produce otra demostración válida.

Para mostrar que el sistema de demostración es correcto, tendríamos que mostrar eso con las demás reglas de inferencia. Dado que las reglas derivadas son consecuencia de las reglas básicas, sería suficiente proporcionar argumentos similares para las otras 16 reglas básicas. Este tedioso ejercicio está fuera del alcance de este libro.

Dada una demostración de que el sistema de demostración es correcto, se sigue que todo teorema es una tautología.

Aun así es posible preguntarse: ¿por qué debemos creer que *todo* argumento válido es un argumento que puede ser demostrado? Es decir, ¿por qué debemos creer que $\mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$?

Este es el problema de la COMPLETITUD. Un sistema de demostración es COMPLETO si hay una demostración de todo argumento válido. La completitud de un lenguaje como la LC fue demostrada por primera vez por Kurt Gödel en 1929. La demostración está fuera del alcance de este libro.

La cuestión importante es que, afortunadamente, el sistema de demostración de la LC es tanto correcto como completo. Esto no es así con todos los sistemas de demostración y todos los lenguajes formales. Dado que es cierto para la LC, podemos elegir entre proporcionar demostraciones o construir modelos —lo que sea más fácil para la tarea en cuestión.

Resumen de definiciones

- Un enunciado $\mathcal{A}$ es un TEOREMA si y solo si $\vdash \mathcal{A}$.
- $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\}$ es DEMOSTRABLEMENTE INCONSISTENTE si y solo si, para algún enunciado $\mathcal{B}$, $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\} \vdash (\mathcal{B} \,\&\, \neg\mathcal{B})$.

Ejercicios

$\star$ **Parte A** Proporciona una justificación (regla y números de línea) para cada línea de demostración que la requiera:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & W \to \neg B \\
2 & A \,\&\, W \\
3 & B \vee (J \,\&\, K) \\ \cline{2-2}
4 & W \\
5 & \neg B \\
6 & J \,\&\, K \\
7 & K
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & \multicolumn{2}{l}{L \leftrightarrow \neg O} \\
2 & \multicolumn{2}{l}{L \vee \neg O} \\ \cline{2-3}
3 & & \neg L \\ \cline{3-3}
4 & & \neg O \\
5 & & L \\
6 & & \neg L \\
7 & \multicolumn{2}{l}{L}
\end{array}
$$

1	$Z \to (C \,\&\, \neg N)$		
2	$\neg Z \to (N \,\&\, \neg C)$		
3		$\neg(N \lor C)$	
4		$\neg N \,\&\, \neg C$	
5			Z
6			$C \,\&\, \neg N$
7			C
8			$\neg C$
9		$\neg Z$	
10		$N \,\&\, \neg C$	
11		N	
12		$\neg N$	
13	$N \lor C$		

$\star$ **Parte B** Da una demostración para cada argumento en la LE.

1. $K \,\&\, L, \therefore K \leftrightarrow L$
2. $A \to (B \to C), \therefore (A \,\&\, B) \to C$
3. $P \,\&\, (Q \lor R),\ P \to \neg R, \therefore Q \lor E$
4. $(C \,\&\, D) \lor E, \therefore E \lor D$
5. $\neg F \to G,\ F \to H, \therefore G \lor H$
6. $(X \,\&\, Y) \lor (X \,\&\, Z),\ \neg(X \,\&\, D),\ D \lor M\ \therefore M$

Parte C Da una demostración para cada argumento en la LE.

1. $Q \to (Q \,\&\, \neg Q), \therefore \neg Q$
2. $J \to \neg J, \therefore \neg J$
3. $E \lor F,\ F \lor G,\ \neg F, \therefore E \,\&\, G$
4. $A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C, \therefore A \leftrightarrow C$
5. $M \lor (N \to M), \therefore \neg M \to \neg N$
6. $S \leftrightarrow T, \therefore S \leftrightarrow (T \lor S)$
7. $(M \lor N) \,\&\, (O \lor P),\ N \to P,\ \neg P, \therefore M \,\&\, O$
8. $(Z \,\&\, K) \lor (K \,\&\, M),\ K \to D, \therefore D$

Parte D Muestra que cada uno de los siguientes enunciados es un teorema en la LE.

1. $O \to O$
2. $N \vee \neg N$
3. $\neg(P \,\&\, \neg P)$
4. $\neg(A \to \neg C) \to (A \to C)$
5. $J \leftrightarrow [J \vee (L \,\&\, \neg L)]$

Parte E Para cada uno de los siguientes pares de enunciados, muestra que son demostrablemente equivalentes en la LE.

1. $\neg\neg\neg\neg G$, G
2. $T \to S$, $\neg S \to \neg T$
3. $R \leftrightarrow E$, $E \leftrightarrow R$
4. $\neg G \leftrightarrow H$, $\neg(G \leftrightarrow H)$
5. $U \to I$, $\neg(U \,\&\, \neg I)$

Parte F Proporciona demostraciones de cada una de las siguientes derivaciones.

1. $M \,\&\, (\neg N \to \neg M) \vdash (N \,\&\, M) \vee \neg M$
2. $\{C \to (E \,\&\, G), \neg C \to G\} \vdash G$
3. $\{(Z \,\&\, K) \leftrightarrow (Y \,\&\, M), D \,\&\, (D \to M)\} \vdash Y \to Z$
4. $\{(W \vee X) \vee (Y \vee Z), X \to Y, \neg Z\} \vdash W \vee Y$

Parte G Proporciona demostraciones de los siguientes puntos usando solo las reglas básicas. Las demostraciones serán más largas que si se usaran las reglas derivadas.

1. Muestra que MT es una regla derivada legítima. Usando solo las reglas básicas, demuestra lo siguiente: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\neg\mathcal{B}$, $\therefore\ \neg\mathcal{A}$
2. Muestra que la regla Con es una regla legítima para el bicondicional. Usando solo las reglas básicas, demuestra que $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A}$ son equivalentes.
3. Usando solo las reglas básicas, demuestra el siguiente caso de las Leyes de De Morgan: $(\neg A \,\&\, \neg B)$, $\therefore\ \neg(A \vee B)$
4. Sin usar la regla NC, demuestra $\neg\exists x \neg\mathcal{A} \vdash \forall x \mathcal{A}$.
5. Muestra que $\leftrightarrow$c es una regla derivada legítima. Usando solo las reglas básicas, demuestra que $D \leftrightarrow E$ y $(D \to E) \,\&\, (E \to D)$ son equivalentes.

⋆ **Parte H** Proporciona una justificación (regla y números de línea) para cada línea de demostración que la requiera:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x \exists y (Rxy \vee Ryx) \\
2 & \underline{\forall x \neg Rmx} \\
3 & \exists y (Rmy \vee Rym) \\
4 & \quad \vert\ \underline{Rma \vee Ram} \\
5 & \quad \vert\ \neg Rma \\
6 & \quad \vert\ Ram \\
7 & \quad \vert\ \exists x Rxm \\
8 & \exists x Rxm
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x (\exists y Lxy \rightarrow \forall z Lzx) \\
2 & \underline{Lab} \\
3 & \exists y Lay \rightarrow \forall z Lza \\
4 & \exists y Lay \\
5 & \forall z Lza \\
6 & Lca \\
7 & \exists y Lcy \rightarrow \forall z Lzc \\
8 & \exists y Lcy \\
9 & \forall z Lzc \\
10 & Lcc \\
11 & \forall x Lxx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x (Jx \rightarrow Kx) \\
2 & \exists x \forall y Lxy \\
3 & \underline{\forall x Jx} \\
4 & \quad \vert\ \underline{\forall y Lay} \\
5 & \quad \vert\ Ja \\
6 & \quad \vert\ Ja \rightarrow Ka \\
7 & \quad \vert\ Ka \\
8 & \quad \vert\ Laa \\
9 & \quad \vert\ Ka \,\&\, Laa \\
10 & \quad \vert\ \exists x (Kx \,\&\, Lxx) \\
11 & \exists x (Kx \,\&\, Lxx)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \quad \vert\ \underline{\neg(\exists x Mx \vee \forall x \neg Mx)} \\
2 & \quad \vert\ \neg \exists x Mx \,\&\, \neg \forall x \neg Mx \\
3 & \quad \vert\ \neg \exists x Mx \\
4 & \quad \vert\ \forall x \neg Mx \\
5 & \quad \vert\ \neg \forall x \neg Mx \\
6 & \exists x Mx \vee \forall x \neg Mx
\end{array}
$$

⋆ **Parte I** Proporciona una demostración para cada afirmación.

1. $\vdash \forall x Fx \vee \neg \forall x Fx$
2. $\{\forall x (Mx \leftrightarrow Nx), Ma \,\&\, \exists x Rxa\} \vdash \exists x Nx$
3. $\{\forall x (\neg Mx \vee Ljx), \forall x (Bx \rightarrow Ljx), \forall x (Mx \vee Bx)\} \vdash \forall x Ljx$
4. $\forall x (Cx \,\&\, Dt) \vdash \forall x Cx \,\&\, Dt$
5. $\exists x (Cx \vee Dt) \vdash \exists x Cx \vee Dt$

Parte J Proporciona una demostración del argumento sobre Billy de la p. 68.

Parte K Vuelve a mirar la Parte B de la p. 80. Proporciona demostraciones que muestren que cada una de las formas de argumento es válida en la LC.

Parte L Aristóteles y sus sucesores identificaron otras formas silogísticas. Simboliza cada una de las siguientes formas de argumento en la LC y añade las asunciones adicionales 'Hay un A' y 'Hay un B'. Después demuestra que las formas de argumento complementadas son válidas en la LC.

Darapti: Todos los A son B. Todos los A son C. $\therefore$ Algún B es C.

Felapton: Ningún B es C. Todos los A son B. $\therefore$ Algún A no es C.

Barbari: Todos los B son C. Todos los A son B. $\therefore$ Algún A es C.

Camestros: Todos los C son B. Ningún A es B. $\therefore$ Algún A no es C.

Celaront: Ningún B es C. Todos los A son B. $\therefore$ Algún A no es C.

Cesaro: Ningún C es B. Todos los A son B. $\therefore$ Algún A no es C.

Fapesmo: Todos los B son C. Ningún A es B. $\therefore$ Algún C no es A.

Parte M Proporciona una demostración para cada afirmación.

1. $\forall x \forall y Gxy \vdash \exists x Gxx$
2. $\forall x \forall y (Gxy \rightarrow Gyx) \vdash \forall x \forall y (Gxy \leftrightarrow Gyx)$
3. $\{\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists x Ax\} \vdash \exists x Bx$
4. $\{Na \rightarrow \forall x(Mx \leftrightarrow Ma), Ma, \neg Mb\} \vdash \neg Na$
5. $\vdash \forall z(Pz \vee \neg Pz)$
6. $\vdash \forall x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy$
7. $\vdash \forall y \exists x(Qy \rightarrow Qx)$

Parte N Para cada par de enunciados, muestra que son demostrablemente equivalentes.

1. $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$, $\neg \exists x(Ax \,\&\, Bx)$
2. $\forall x(\neg Ax \rightarrow Bd)$, $\forall x Ax \vee Bd$
3. $\exists x Px \rightarrow Qc$, $\forall x(Px \rightarrow Qc)$

Parte Ñ Muestra que cada uno de los siguientes conjuntos es demostrablemente inconsistente.

1. $\{Sa \rightarrow Tm, Tm \rightarrow Sa, Tm \,\&\, \neg Sa\}$

2. $\{\neg\exists xRxa,\ \forall x\forall yRyx\}$
3. $\{\neg\exists x\exists yLxy,\ Laa\}$
4. $\{\forall x(Px \to Qx),\ \forall z(Pz \to Rz),\ \forall yPy,\ \neg Qa \,\&\, \neg Rb\}$

$\star$ **Parte O** Escribe una clave de simbolización para el siguiente argumento, tradúcelo y demuéstralo:

> Hay alguien a quien le gustan todos aquellos a quienes les gustan todos aquellos que le gustan a él. Por lo tanto, hay alguien que se gusta a sí mismo.

Parte P Proporciona una demostración para cada afirmación.

1. $\{Pa \lor Qb, Qb \to b = c, \neg Pa\} \vdash Qc$
2. $\{m = n \lor n = o, An\} \vdash Am \lor Ao$
3. $\{\forall x x = m, Rma\} \vdash \exists xRxx$
4. $\neg\exists x x \neq m \vdash \forall x\forall y(Px \to Py)$
5. $\forall x\forall y(Rxy \to x = y) \vdash Rab \to Rba$
6. $\{\exists xJx, \exists x\neg Jx\} \vdash \exists x\exists y\ x \neq y$
7. $\{\forall x(x = n \leftrightarrow Mx), \forall x(Ox \lor \neg Mx)\} \vdash On$
8. $\{\exists xDx, \forall x(x = p \leftrightarrow Dx)\} \vdash Dp$
9. $\{\exists x\big[Kx \,\&\, \forall y(Ky \to x = y) \,\&\, Bx\big], Kd\} \vdash Bd$
10. $\vdash Pa \to \forall x(Px \lor x \neq a)$

Parte Q Mira de nuevo la Parte D en la p. 81. Para cada argumento: Si es válido en la LC, proporciona una demostración. Si es inválido, construye un modelo que muestre que es inválido.

$\star$ **Parte R** Para cada uno de los siguientes pares de enunciados: si son lógicamente equivalentes en la LC, da demostraciones de ello. Si no lo son, construye un modelo que lo muestre.

1. $\forall xPx \to Qc,\ \forall x(Px \to Qc)$
2. $\forall xPx \,\&\, Qc,\ \forall x(Px \,\&\, Qc)$
3. $Qc \lor \exists xQx,\ \exists x(Qc \lor Qx)$
4. $\forall x\forall y\forall zBxyz,\ \forall xBxxx$
5. $\forall x\forall yDxy,\ \forall y\forall xDxy$
6. $\exists x\forall yDxy,\ \forall y\exists xDxy$

$\star$ **Parte S** Para cada uno de los siguientes argumentos: si es válido en la LC, proporciona una demostración. Si es inválido, construye un modelo que muestre que es inválido.

1. $\forall x \exists y Rxy$, $\therefore$ $\exists y \forall x Rxy$
2. $\exists y \forall x Rxy$, $\therefore$ $\forall x \exists y Rxy$
3. $\exists x(Px \,\&\, \neg Qx)$, $\therefore$ $\forall x(Px \to \neg Qx)$
4. $\forall x(Sx \to Ta)$, Sd, $\therefore$ Ta
5. $\forall x(Ax \to Bx)$, $\forall x(Bx \to Cx)$, $\therefore$ $\forall x(Ax \to Cx)$
6. $\exists x(Dx \vee Ex)$, $\forall x(Dx \to Fx)$, $\therefore$ $\exists x(Dx \,\&\, Fx)$
7. $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$, $\therefore$ Rjj
8. $\exists x \exists y(Rxy \vee Ryx)$, $\therefore$ Rjj
9. $\forall x Px \to \forall x Qx$, $\exists x \neg Px$, $\therefore$ $\exists x \neg Qx$
10. $\exists x Mx \to \exists x Nx$, $\neg \exists x Nx$, $\therefore$ $\forall x \neg Mx$

Parte T

1. Si sabes que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, ¿qué puedes decir sobre $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B}$? Explica tu respuesta.
2. Si sabes que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, ¿qué puedes decir sobre $(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B}$? Explica tu respuesta.

Apéndice A

Notación simbólica

En la historia de la lógica formal se han usado diferentes símbolos en momentos diferentes y por autores diferentes. A menudo los autores se veían obligados a usar una notación que sus impresoras pudieran imprimir.

En cierto sentido, los símbolos que se usan para las diferentes constantes lógicas es arbitrario. No está escrito en el cielo que '$\neg$' deba ser el símbolo de la negación veritativo-funcional. Podríamos haber especificado un símbolo diferente para representar ese papel. Sin embargo, desde el momento en que damos definiciones de fórmulas bien formadas (fbf) y de la verdad en nuestros lenguajes lógicos, el uso de '$\neg$' ya no es arbitrario. Ese es el símbolo de la negación en este libro de texto, así que ese es el símbolo de la negación cuando escribimos enunciados en los lenguajes de la LE o la LC.

resumen de símbolos	
negación	$\neg$, $\sim$
conjunción	&, $\wedge$, $\bullet$
disyunción	$\vee$
condicional	$\rightarrow$, $\supset$
bicondicional	$\leftrightarrow$, $\equiv$

Este apéndice presenta algunos símbolos comunes para que puedas reconocerlos si los encuentras en un artículo o en otro libro.

Negación Dos símbolos usados comúnmente son '$\neg$' y la virgulilla '$\sim$'. En algunos sistemas formales más avanzados es necesario distinguir entre dos tipos de negación, y esta distinción a veces se representa usando '$\neg$' y '$\sim$'.

Disyunción El símbolo '$\vee$' habitualmente se usa para simbolizar la disyunción inclusiva.

Conjunción La conjunción a menudo se simboliza con la conjunción inglesa '&'. Este carácter es en realidad una forma decorativa de la palabra latina 'et', que significa 'y'; se usa comúnmente en el inglés escrito. Como símbolo en un sistema formal, la conjunción inglesa no es la palabra 'y'; su significado viene dado por la semántica formal del lenguaje. Tal vez para evitar esta confusión, algunos sistemas usan un símbolo diferente para la conjunción. Por ejemplo, '$\wedge$' es la contrapartida del símbolo que se usa para la disyunción. A veces es un único punto '$\bullet$' lo que se usa. En algunos textos más antiguos no hay ningún símbolo para la conjunción; 'A y B' se escribe simplemente 'AB'.

Condicional material Hay dos símbolos comunes para el condicional material: la *flecha* '$\rightarrow$' y el *gancho* '$\supset$.'

Bicondicional material La *doble flecha* '$\leftrightarrow$' se usa en sistemas que usan la flecha para representar el condicional material. Los sistemas que usan el gancho para el condicional habitualmente usan el símbolo de tres líneas '$\equiv$' para el bicondicional.

Cuantificadores El cuantificador universal habitualmente se simboliza como una A cabeza abajo, '$\forall$', y el cuantificador existencial como una E girada hacia atrás, '$\exists$'. En algunos textos no hay un símbolo separado para el cuantificador universal. En lugar de ello, la variable se escribe entre paréntesis delante de la fórmula en la que está ligada. Por ejemplo, 'todos los x son P' se escribe $(x)Px$.

En algunos sistemas, los cuantificadores se simbolizan con versiones más grandes de los símbolos que se usan para la conjunción y la disyunción. Aunque las expresiones cuantificadas no pueden traducirse a expresiones sin cuantificadores, hay una conexión conceptual entre el cuantificador universal y la conjunción así como entre el cuantificador existencial y la disyunción. Piensa, por ejemplo, en el enunciado $\exists xPx$. Significa que *o bien* el primer miembro del UD es un P, *o bien* lo es el segundo, *o bien* lo es el tercero, ... En tales sistemas se usa el símbolo '$\bigvee$' en lugar de '$\exists$'.

La notación polaca

En esta sección se comenta brevemente la lógica de enunciados en notación polaca, un sistema de notación introducido a finales de los años 1920 por el lógico polaco Jan Łukasiewicz.

Las letras minúsculas se usan como letras de enunciado. La letra mayúscula N se usa para la negación. A se usa para la disyunción, K para la conjunción, C para el condicional, y E para el bicondicional. ('A' es de alternancia, otro nombre para la disyunción lógica. 'E' es de equivalencia.)

notación de LE	notación polaca
$\neg$	N
&	K
$\vee$	A
$\rightarrow$	C
$\leftrightarrow$	E

En la notación polaca, las conectivas binarias se escriben *antes* de los dos enunciados que conectan. Por ejemplo, el enunciado $A \& B$ de la LE se escribe Kab en notación polaca.

Los enunciados $\neg A \to B$ y $\neg(A \to B)$ son muy diferentes; el operador lógico principal del primero es el condicional, mientras que la conectiva principal del segundo es la negación. En la LE, esto se muestra poniendo paréntesis alrededor del condicional en el segundo enunciado. En la notación polaca nunca se necesitan los paréntesis. La conectiva situada más a la izquierda siempre es la conectiva principal. El primer enunciado se escribiría simplemente $CNab$ y el segundo $NCab$.

Esta característica de la notación polaca implica que es posible evaluar enunciados simplemente trabajando con los símbolos de derecha a izquierda. Si, por ejemplo, estuvieras construyendo una tabla de verdad para $NKab$, primero tendrías en cuenta los valores asignados a b y a, después su conjunción, y después negarías el resultado. La regla general para saber qué es lo siguiente que se debe evaluar en la LE no es en absoluto tan simple. En la LE, la tabla de verdad de $\neg(A \& B)$ requiere mirar A y B, después mirar la conjunción en la mitad del enunciado, y después la negación al principio del enunciado. Dado que el orden de las operaciones puede especificarse de manera más mecánica en la notación polaca, se usan variantes de la notación polaca en la estructura interna de muchos lenguajes de programación de ordenadores.

Apéndice B

Soluciones de ejercicios seleccionados

Muchos de los ejercicios pueden ser resueltos correctamente de diferentes maneras. Cuando ese sea el caso, la solución que se muestra aquí representa una respuesta correcta posible.

Capítulo 1 Parte C

1. consistente
2. inconsistente
3. consistente
4. consistente

Capítulo 1 Parte D 1, 2, 3, 6, 8, y 10 son posibles.

Capítulo 2 Parte A

1. $\neg M$
2. $M \vee \neg M$
3. $G \vee C$
4. $\neg C \,\&\, \neg G$
5. $C \rightarrow (\neg G \,\&\, \neg M)$
6. $M \vee (C \vee G)$

Capítulo 2 Parte C

1. $E_1 \,\&\, E_2$

2. $F_1 \to S_1$
3. $F_1 \vee E_1$
4. $E_2 \,\&\, \neg S_2$
5. $\neg E_1 \,\&\, \neg E_2$
6. $E_1 \,\&\, E_2 \,\&\, \neg(S_1 \vee S_2)$
7. $S_2 \to F_2$
8. $(\neg E_1 \to \neg E_2) \,\&\, (E_1 \to E_2)$
9. $S_1 \leftrightarrow \neg S_2$
10. $(E_2 \,\&\, F_2) \to S_2$
11. $\neg(E_2 \,\&\, F_2)$
12. $(F_1 \,\&\, F_2) \leftrightarrow (\neg E_1 \,\&\, \neg E_2)$

Capítulo 2 Parte D

A: Alice es una espía.
B: Bob es un espía.
C: El código ha sido descifrado.
G: Habrá un revuelo en la embajada alemana.

1. $A \,\&\, B$
2. $(A \vee B) \to C$
3. $\neg(A \vee B) \to \neg C$
4. $G \vee C$
5. $(C \vee \neg C) \,\&\, G$
6. $(A \vee B) \,\&\, \neg(A \,\&\, B)$

Capítulo 2 Parte G

1. (a) no (b) no
2. (a) no (b) sí
3. (a) sí (b) sí
4. (a) no (b) no
5. (a) sí (b) sí
6. (a) no (b) no
7. (a) no (b) sí
8. (a) no (b) sí
9. (a) no (b) no

Capítulo 3 Parte A

1. tautología
2. contradicción
3. contingente

4. tautología
5. tautología
6. contingente
7. tautología
8. contradicción
9. tautología
10. contradicción
11. tautología
12. contingente
13. contradicción
14. contingente
15. tautología
16. tautología
17. contingente
18. contingente

Capítulo 3 Parte B 2, 3, 5, 6, 8, y 9 son lógicamente equivalentes.

Capítulo 3 Parte C 1, 3, 6, 7, y 8 son consistentes.

Capítulo 3 Parte D 3, 5, 8, y 10 son válidos.

Capítulo 3 Parte E

1. $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen el mismo valor de verdad en cada una de las líneas de la tabla de verdad completa, así que $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ es verdadero en todas las líneas. Es una tautología.
2. El enunciado es falso en alguna de las líneas de la tabla de verdad completa. En esa línea, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son verdaderos y $\mathcal{C}$ es falso. Así que el argumento es inválido.
3. Dado que no hay ninguna línea de la tabla de verdad completa en la que los tres enunciados sean verdaderos, la conjunción es falsa en todas las líneas. Así que es una contradicción.
4. Dado que $\mathcal{A}$ es falso en todas las líneas de la tabla de verdad completa, no hay ninguna línea en la que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean verdaderos y $\mathcal{C}$ sea falso. Así que el argumento es válido.
5. Dado que $\mathcal{C}$ es verdadero en todas las líneas de la tabla de verdad completa, no hay ninguna línea en la que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean verdaderos y $\mathcal{C}$ sea falso. Así que el argumento es válido.
6. No mucho. $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ es una tautología si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son tautologías; es una contradicción si son contradicciones; es contingente si son contingentes.
7. $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen diferentes valores de verdad en al menos una de las líneas de la tabla de verdad completa, y $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ será verdadero en esa línea. En las otras líneas puede ser verdadero o falso. Así que $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ o es una tautología o es contingente, *no* es una contradicción.

Capítulo 3 Parte F

1. $\neg A \to B$
2. $\neg(A \to \neg B)$
3. $\neg[(A \to B) \to \neg(B \to A)]$

Capítulo 4 Parte A

1. $Za \,\&\, Zb \,\&\, Zc$
2. $Rb \,\&\, \neg Ab$
3. $Lcb \to Mb$
4. $(Ab \,\&\, Ac) \to (Lab \,\&\, Lac)$
5. $\exists x(Rx \,\&\, Zx)$
6. $\forall x(Ax \to Rx)$
7. $\forall x\big[Zx \to (Mx \vee Ax)\big]$
8. $\exists x(Rx \,\&\, \neg Ax)$
9. $\exists x(Rx \,\&\, Lcx)$
10. $\forall x\big[(Mx \,\&\, Zx) \to Lbx\big]$
11. $\forall x\big[(Mx \,\&\, Lax) \to Lxa\big]$
12. $\exists x Rx \to Ra$
13. $\forall x(Ax \to Rx)$
14. $\forall x\big[(Mx \,\&\, Lcx) \to Lax\big]$
15. $\exists x(Mx \,\&\, Lxb \,\&\, \neg Lbx)$

Capítulo 4 Parte E

1. $\neg\exists x Tx$
2. $\forall x(Mx \to Sx)$
3. $\exists x \neg Sx$
4. $\exists x[Cx \,\&\, \neg\exists y Byx]$
5. $\neg\exists x Bxx$
6. $\neg\exists x(Cx \,\&\, \neg Sx \,\&\, Tx)$
7. $\exists x(Cx \,\&\, Tx) \,\&\, \exists x(Mx \,\&\, Tx) \,\&\, \neg\exists x(Cx \,\&\, Mx \,\&\, Tx)$
8. $\forall x[Cx \to \forall y(\neg Cy \to Bxy)]$
9. $\forall x\big((Cx \,\&\, Mx) \to \forall y[(\neg Cy \,\&\, \neg My) \to Bxy]\big)$

Capítulo 4 Parte G

1. $\forall x(Cxp \to Dx)$
2. $Cjp \,\&\, Fj$
3. $\exists x(Cxp \,\&\, Fx)$
4. $\neg\exists x Sxj$
5. $\forall x\big[(Cxp \,\&\, Fx) \to Dx\big]$

6. $\neg\exists x(Cxp \,\&\, Mx)$
7. $\exists x(Cjx \,\&\, Sxe \,\&\, Fj)$
8. $Spe \,\&\, Mp$
9. $\forall x\big[(Sxp \,\&\, Mx) \to \neg\exists yCyx\big]$
10. $\exists x\big(Sxj \,\&\, \exists yCyx \,\&\, Fj\big)$
11. $\forall x\big[Dx \to \exists y(Sxy \,\&\, Fy \,\&\, Dy)\big]$
12. $\forall x\big[(Mx \,\&\, Dx) \to \exists y(Cxy \,\&\, Dy)\big]$

Capítulo 4 Parte I

1. Rca, Rcb, Rcc, y Rcd son casos de sustitución de $\forall xRcx$.
2. De las expresiones enumeradas, solo $\forall yLby$ es un caso de sustitución de $\exists x\forall yLxy$.

Capítulo 4 Parte K

1. $\forall x(Cx \to Bx)$
2. $\neg\exists xWx$
3. $\exists x\exists y(Cx \,\&\, Cy \,\&\, x \neq y)$
4. $\exists x\exists y(Jx \,\&\, Ox \,\&\, Jy \,\&\, Oy \,\&\, x \neq y)$
5. $\forall x\forall y\forall z\big[(Jx \,\&\, Ox \,\&\, Jy \,\&\, Oy \,\&\, Jz \,\&\, Oz) \to (x = y \vee x = z \vee y = z)\big]$
6. $\exists x\exists y\big(Jx \,\&\, Bx \,\&\, Jy \,\&\, By \,\&\, x \neq y \,\&\, \forall z[(Jz \,\&\, Bz) \to (x = z \vee y = z)]\big)$
7. $\exists x_1\exists x_2\exists x_3\exists x_4\big[Dx_1 \,\&\, Dx_2 \,\&\, Dx_3 \,\&\, Dx_4 \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, x_1 \neq x_3 \,\&\, x_1 \neq x_4 \,\&\, x_2 \neq x_3 \,\&\, x_2 \neq x_4 \,\&\, x_3 \neq x_4 \,\&\, \neg\exists y(Dy \,\&\, y \neq x_1 \,\&\, y \neq x_2 \,\&\, y \neq x_3 \,\&\, y \neq x_4)\big]$
8. $\exists x\big(Dx \,\&\, Cx \,\&\, \forall y[(Dy \,\&\, Cy) \to x = y] \,\&\, Bx\big)$
9. $\forall x\big[(Ox \,\&\, Jx) \to Wx\big] \,\&\, \exists x\big[Mx \,\&\, \forall y(My \to x = y) \,\&\, Wx\big]$
10. $\exists x\big(Dx \,\&\, Cx \,\&\, \forall y[(Dy \,\&\, Cy) \to x = y] \,\&\, Wx\big) \to \exists x\forall y(Wx \leftrightarrow x = y)$
11. negación externa: $\neg\exists x\big[Mx \,\&\, \forall y(My \to x = y) \,\&\, Jx\big]$
    negación interna: $\exists x\big[Mx \,\&\, \forall y(My \to x = y) \,\&\, \neg Jx\big]$
12. negación externa: $\neg\exists x\exists z\big(Dx \,\&\, Cx \,\&\, Mz \,\&\, \forall y[(Dy \,\&\, Cy) \to x = y] \,\&\, \forall y[(My \to z = y) \,\&\, x = z]\big)$
    negación interna: $\exists x\exists z\big(Dx \,\&\, Cx \,\&\, Mz \,\&\, \forall y[(Dy \,\&\, Cy) \to x = y] \,\&\, \forall y[(My \to z = y) \,\&\, x \neq z]\big)$

Capítulo 5 Parte A 2, 3, 4, 6, 8, y 9 son verdaderos en el modelo.

Capítulo 5 Parte B 4, 5, y 7 son verdaderos en el modelo.

Capítulo 5 Parte D

$$\begin{aligned}
\text{UD} &= \{10,11,12,13\}\\
\text{extensión}(O) &= \{11,13\}\\
\text{extensión}(S) &= \emptyset\\
\text{extensión}(T) &= \{10,11,12,13\}\\
\text{extensión}(U) &= \{13\}\\
\text{extensión}(N) &= \{<11,10>,<12,11>,<13,12>\}
\end{aligned}$$

Capítulo 5 Parte E

1. El enunciado es verdadero en este modelo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Stan}\} \\ \text{extensión}(D) &= \{\text{Stan}\} \\ \text{referente}(a) &= \text{Stan} \\ \text{referente}(b) &= \text{Stan} \end{aligned}$$

   Y es falso en este modelo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Stan}\} \\ \text{extensión}(D) &= \emptyset \\ \text{referente}(a) &= \text{Stan} \\ \text{referente}(b) &= \text{Stan} \end{aligned}$$

2. El enunciado es verdadero en este modelo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Stan}\} \\ \text{extensión}(T) &= \{<\text{Stan, Stan}>\} \\ \text{referente}(h) &= \text{Stan} \end{aligned}$$

   Y es falso en este modelo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Stan}\} \\ \text{extensión}(T) &= \emptyset \\ \text{referente}(h) &= \text{Stan} \end{aligned}$$

3. El enunciado es verdadero en este modelo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Stan, Ollie}\} \\ \text{extensión}(P) &= \{\text{Stan}\} \\ \text{referente}(m) &= \text{Stan} \end{aligned}$$

   Y es falso en este modelo:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Stan}\} \\ \text{extensión}(P) &= \emptyset \\ \text{referente}(m) &= \text{Stan} \end{aligned}$$

Capítulo 5 Parte F Hay muchas respuestas correctas posibles. Estas son algunas:

1. Hacer que el primer enunciado sea verdadero y el segundo falso:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\alpha\} \\ \text{extensión}(J) &= \{\alpha\} \\ \text{extensión}(K) &= \emptyset \\ \text{referente}(a) &= \alpha \end{aligned}$$

2. Hacer que el primer enunciado sea verdadero y el segundo falso:

$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\alpha, \omega\} \\ \text{extensión}(J) &= \{\alpha\} \\ \text{referente}(m) &= \omega \end{aligned}$$

3. Hacer que el primer enunciado sea falso y el segundo verdadero:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\alpha, \omega\} \\ \text{extensión}(R) &= \{<\alpha, \alpha>\} \end{aligned}$$
4. Hacer que el primer enunciado sea falso y el segundo verdadero:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\alpha, \omega\} \\ \text{extensión}(P) &= \{\alpha\} \\ \text{extensión}(Q) &= \emptyset \\ \text{referente}(c) &= \alpha \end{aligned}$$
5. Hacer que el primer enunciado sea verdadero y el segundo falso:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\iota\} \\ \text{extensión}(P) &= \emptyset \\ \text{extensión}(Q) &= \emptyset \end{aligned}$$
6. Hacer que el primer enunciado sea falso y el segundo verdadero:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\iota\} \\ \text{extensión}(P) &= \emptyset \\ \text{extensión}(Q) &= \{\iota\} \end{aligned}$$
7. Hacer que el primer enunciado sea verdadero y el segundo falso:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\iota\} \\ \text{extensión}(P) &= \emptyset \\ \text{extensión}(Q) &= \{\iota\} \end{aligned}$$
8. Hacer que el primer enunciado sea verdadero y el segundo falso:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\alpha, \omega\} \\ \text{extensión}(R) &= \{<\alpha, \omega>, <\omega, \alpha>\} \end{aligned}$$
9. Hacer que el primer enunciado sea falso y el segundo verdadero:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\alpha, \omega\} \\ \text{extensión}(R) &= \{<\alpha, \alpha>, <\alpha, \omega>\} \end{aligned}$$

Capítulo 5 Parte I

1. Hay muchas respuestas posibles. Esta es una:
$$\begin{aligned} \text{UD} &= \{\text{Harry, Sally}\} \\ \text{extensión}(R) &= \{<\text{Sally, Harry}>\} \\ \text{referente}(a) &= \text{Harry} \end{aligned}$$
2. No hay predicados ni constantes, así que solo tenemos que proporcionar un UD. Cualquier UD con 2 miembros servirá.
3. Tenemos que mostrar que es imposible construir un modelo en el que ambos sean verdaderos. Supón que $\exists x\, x \neq a$ es verdadero en un modelo. Hay algo en el universo del discurso que *no* es el referente de a. Así que hay al menos dos cosas en el universo del discurso: referente(a) y esa otra cosa. Llamemos a esa otra cosa β —sabemos que $a \neq \beta$. Pero si $a \neq \beta$, entonces $\forall x \forall y\, x = y$ es falso. Así que el primer enunciado debe ser falso si el segundo enunciado es verdadero. Así que no hay ningún modelo en el que ambos sean verdaderos. Por lo tanto, son inconsistentes.

Capítulo 5 Parte J

2. No, no supondría ninguna diferencia. La satisfacción de una fórmula con una o más variables libres depende de qué hace la asignación de variables con esas variables. Pero, dado que un enunciado no tiene variables libres, su satisfacción no depende de la asignación de variables. Así que un enunciado que es satisfecho por *alguna* asignación de variables es satisfecho también por *cualquier* otra asignación de variables.

Capítulo 6 Parte A

1	$W \to \neg B$	
2	$A \,\&\, W$	
3	$B \vee (J \,\&\, K)$	
4	W	&E 2
5	$\neg B$	→E 1, 4
6	$J \,\&\, K$	∨E 3, 5
7	K	&E 6

1	$L \leftrightarrow \neg O$	
2	$L \vee \neg O$	
3	$\quad \neg L$	
4	$\quad \neg O$	∨E 2, 3
5	$\quad L$	↔E 1, 4
6	$\quad \neg L$	R 3
7	L	¬E 3–6

1	$Z \to (C \,\&\, \neg N)$	
2	$\neg Z \to (N \,\&\, \neg C)$	
3	$\quad \neg(N \vee C)$	
4	$\quad \neg N \,\&\, \neg C$	DeM 3
5	$\quad\quad Z$	
6	$\quad\quad C \,\&\, \neg N$	→E 1, 5
7	$\quad\quad C$	&E 6
8	$\quad\quad \neg C$	&E 4
9	$\quad \neg Z$	¬I 5–8
10	$\quad N \,\&\, \neg C$	→E 2, 9
11	$\quad N$	&E 10
12	$\quad \neg N$	&E 4
13	$N \vee C$	¬E 3–12

Capítulo 6 Parte B

1.

1	$K \,\&\, L$	busco $K \leftrightarrow L$
2	$\quad K$	busco L
3	$\quad L$	$\&$E 1
4	$\quad L$	busco K
5	$\quad K$	$\&$E 1
6	$K \leftrightarrow L$	$\leftrightarrow$I 2–3, 4–5

2.

1	$A \to (B \to C)$	busco $(A \,\&\, B) \to C$
2	$\quad A \,\&\, B$	busco C
3	$\quad A$	$\&$E 2
4	$\quad B \to C$	$\to$E 1, 3
5	$\quad B$	$\&$E 2
6	$\quad C$	$\to$E 4, 5
7	$(A \,\&\, B) \to C$	$\to$I 2–6

3.

1	$P \,\&\, (Q \vee R)$	
2	$P \to \neg R$	busco $Q \vee E$
3	P	$\&$E 1
4	$\neg R$	$\to$E 2, 3
5	$Q \vee R$	$\&$E 1
6	Q	$\vee$E 5, 4
7	$Q \vee E$	$\vee$I 6

4.

1	$(C \,\&\, D) \vee E$	busco $E \vee D$
2	$\quad \neg E$	busco D
3	$\quad C \,\&\, D$	$\vee$E 1, 2
4	$\quad D$	$\&$E 3
5	$\neg E \to D$	$\to$I 2–4
6	$E \vee D$	CM 5

5.

1	$\neg F \to G$	
2	$F \to H$	busco $G \vee H$
3	$\quad \neg G$	busco H
4	$\quad \neg\neg F$	MT 1, 3
5	$\quad F$	DN 4
6	$\quad H$	$\to$E 2, 5
7	$\neg G \to H$	$\to$I 3–6
8	$G \vee H$	CN 7

6.

1	$(X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, Z)$	
2	$\neg(X \,\&\, D)$	
3	$D \vee M$	busco M
4	$\quad \neg X$	por reductio
5	$\quad \neg X \vee \neg Y$	$\vee$I 4
6	$\quad \neg(X \,\&\, Y)$	DeM 5
7	$\quad X \,\&\, Z$	$\vee$E 1, 6
8	$\quad X$	&E 7
9	$\quad \neg X$	R 4
10	X	$\neg$E 4–9
11	$\quad \neg M$	por reductio
12	$\quad D$	$\vee$E 3, 11
13	$\quad X \,\&\, D$	&I 10, 12
14	$\quad \neg(X \,\&\, D)$	R 2
15	M	$\neg$E 11–14

Capítulo 6 Parte H

1	$\forall x \exists y(Rxy \vee Ryx)$	
2	$\forall x \neg Rmx$	
3	$\exists y(Rmy \vee Rym)$	$\forall$E 1
4	$\quad Rma \vee Ram$	
5	$\quad \neg Rma$	$\forall$E 2
6	$\quad Ram$	$\vee$E 4, 5
7	$\quad \exists x Rxm$	$\exists$I 6
8	$\exists x Rxm$	$\exists$E 3, 4–7

1	$\forall x(\exists y Lxy \to \forall z Lzx)$	
2	Lab	
3	$\exists y Lay \to \forall z Lza$	$\forall$E 1
4	$\exists y Lay$	$\exists$I 2
5	$\forall z Lza$	$\to$E 3, 4
6	Lca	$\forall$E 5
7	$\exists y Lcy \to \forall z Lzc$	$\forall$E 1
8	$\exists y Lcy$	$\exists$I 6
9	$\forall z Lzc$	$\to$E 7, 8
10	Lcc	$\forall$E 9
11	$\forall x Lxx$	$\forall$I 10

1	$\forall x(Jx \to Kx)$	
2	$\exists x \forall y Lxy$	
3	$\forall x Jx$	
4	$\quad \forall y Lay$	
5	$\quad Ja$	$\forall$E 3
6	$\quad Ja \to Ka$	$\forall$E 1
7	$\quad Ka$	$\to$E 6, 5
8	$\quad Laa$	$\forall$E 4
9	$\quad Ka \,\&\, Laa$	&I 7, 8
10	$\quad \exists x(Kx \,\&\, Lxx)$	$\exists$I 9
11	$\exists x(Kx \,\&\, Lxx)$	$\exists$E 2, 4–10

1	$\quad \neg(\exists x Mx \lor \forall x \neg Mx)$	
2	$\quad \neg\exists x Mx \,\&\, \neg\forall x \neg Mx$	DeM 1
3	$\quad \neg\exists x Mx$	&E 2
4	$\quad \forall x \neg Mx$	NC 3
5	$\quad \neg\forall x \neg Mx$	&E 2
6	$\exists x Mx \lor \forall x \neg Mx$	$\neg$E 1–5

Capítulo 6 Parte I

1.

1	$\quad \neg(\forall x Fx \lor \neg\forall x Fx)$	por reductio
2	$\quad \neg\forall x Fx \,\&\, \neg\neg\forall x Fx$	DeM 1
3	$\quad \neg\forall x Fx$	&E 2
4	$\quad \neg\neg\forall x Fx$	&E 2
5	$\forall x Fx \lor \neg\forall x Fx$	$\neg$E 1–4

2.

1	$\forall x(Mx \leftrightarrow Nx)$	
2	$Ma \,\&\, \exists x Rxa$	busco $\exists x Nx$
3	$Ma \leftrightarrow Na$	$\forall$E 1
4	Ma	&E 2
5	Na	$\leftrightarrow$E 3, 4
6	$\exists x Nx$	$\exists$I 5

3.

1	$\forall x(\neg Mx \vee Ljx)$	
2	$\forall x(Bx \rightarrow Ljx)$	
3	$\forall x(Mx \vee Bx)$	busco $\forall x Ljx$
4	$\neg Ma \vee Lja$	$\forall$E 1
5	$Ma \rightarrow Lja$	CM 4
6	$Ba \rightarrow Lja$	$\forall$E 2
7	$Ma \vee Ba$	$\forall$E 3
8	Lja	DIL 7, 5, 6
9	$\forall x Ljx$	$\forall$I 8

4.

1	$\forall x(Cx \,\&\, Dt)$	busco $\forall x Cx \,\&\, Dt$
2	$Ca \,\&\, Dt$	$\forall$E 1
3	Ca	&E 2
4	$\forall x Cx$	$\forall$I 3
5	Dt	&E 2
6	$\forall x Cx \,\&\, Dt$	&I 4, 5

5.

1	$\exists x(Cx \vee Dt)$	busco $\exists xCx \vee Dt$
2	$\quad Ca \vee Dt$	por $\exists$E
3	$\quad\quad \neg(\exists xCx \vee Dt)$	por reductio
4	$\quad\quad \neg\exists xCx \,\&\, \neg Dt$	DeM 3
5	$\quad\quad \neg Dt$	& E 4
6	$\quad\quad Ca$	$\vee$E 2, 5
7	$\quad\quad \exists xCx$	$\exists$I 6
8	$\quad\quad \neg\exists xCx$	& E 4
9	$\quad \exists xCx \vee Dt$	$\neg$E 3–8
10	$\exists xCx \vee Dt$	$\exists$E 1, 2–9

Capítulo 6 Parte O En relación con la traducción de este argumento, ver p. 70.

1	$\exists x\forall y[\forall z(Lxz \to Lyz) \to Lxy]$	
2	$\quad \forall y[\forall z(Laz \to Lyz) \to Lay]$	
3	$\quad \forall z(Laz \to Laz) \to Laa$	$\forall$E 2
4	$\quad\quad \neg\exists xLxx$	por reductio
5	$\quad\quad \forall x\neg Lxx$	NC 4
6	$\quad\quad \neg Laa$	$\forall$E 5
7	$\quad\quad \neg\forall z(Laz \to Laz)$	MT 5, 6
8	$\quad\quad\quad Lab$	
9	$\quad\quad\quad Lab$	R 8
10	$\quad\quad Lab \to Lab$	$\to$I 8—9
11	$\quad\quad \forall z(Laz \to Laz)$	$\forall$I 10
12	$\quad\quad \neg\forall z(Laz \to Laz)$	R 7
13	$\quad \exists xLxx$	$\neg$E 4—12
14	$\exists xLxx$	$\exists$E 1, 2—13

Capítulo 6 Parte R 2, 3, y 5 son lógicamente equivalentes.

Capítulo 6 Parte S 2, 4, 5, 7, y 10 son válidos. Estas son las respuestas completas para algunos de ellos:

1. UD = {mocha, freddo}
   extensión(R) = {<mocha, freddo>, <freddo, mocha>}

2.

1	$\exists y \forall x Rxy$	busco $\forall x \exists y Rxy$
2	$\quad \forall x Rxa$	
3	$\quad Rba$	$\forall$E 2
4	$\quad \exists y Rby$	$\exists$I 3
5	$\quad \forall x \exists y Rxy$	$\forall$I 4
6	$\forall x \exists y Rxy$	$\exists$E 1, 2–5

Guía de Referencia Rápida

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
1	0
0	1

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Simbolización

Conectivas de Enunciados (capítulo 2)

No se da el caso de que P.	$\neg P$
O P o Q.	$(P \vee Q)$
Ni P ni Q.	$\neg(P \vee Q)$ o $(\neg P \,\&\, \neg Q)$
P y Q.	$(P \,\&\, Q)$
Si P, entonces Q.	$(P \to Q)$
P solo si Q.	$(P \to Q)$
P si y solo si Q.	$(P \leftrightarrow Q)$
A menos que P, Q. P a menos que Q.	$(P \vee Q)$

Predicados (capítulo 4)

Todos los F son G.	$\forall x(Fx \to Gx)$
Algunos F son G.	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$
No todos los F son G.	$\neg\forall x(Fx \to Gx)$ o $\exists x(Fx \,\&\, \neg Gx)$
Ningún F es G.	$\forall x(Fx \to \neg Gx)$ or $\neg\exists x(Fx \,\&\, Gx)$

Identidad (sección 4.6)

Solo j es G.	$\forall x(Gx \leftrightarrow x = j)$
Todos menos j son G.	$\forall x(x \neq j \to Gx)$
El F es G.	$\exists x(Fx \,\&\, \forall y(Fy \to x = y) \,\&\, Gx)$
'El F no es G' puede traducirse de dos maneras:	
No se da el caso de que el F sea G. (externa)	$\neg\exists x(Fx \,\&\, \forall y(Fy \to x = y) \,\&\, Gx)$
El F es no G. (interna)	$\exists x(Fx \,\&\, \forall y(Fy \to x = y) \,\&\, \neg Gx)$

Usar la identidad para simbolizar cantidades

Hay al menos _____ F.

uno $\exists xFx$

dos $\exists x_1\exists x_2(Fx_1 \,\&\, Fx_2 \,\&\, x_1 \neq x_2)$

tres $\exists x_1\exists x_2\exists x_3(Fx_1 \,\&\, Fx_2 \,\&\, Fx_3 \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, x_1 \neq x_3 \,\&\, x_2 \neq x_3)$

cuatro $\exists x_1\exists x_2\exists x_3\exists x_4(Fx_1 \,\&\, Fx_2 \,\&\, Fx_3 \,\&\, Fx_4 \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, x_1 \neq x_3 \,\&\, x_1 \neq x_4 \,\&\, x_2 \neq x_3 \,\&\, x_2 \neq x_4 \,\&\, x_3 \neq x_4)$

n $\exists x_1 \cdots \exists x_n(Fx_1 \,\&\, \cdots \,\&\, Fx_n \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, \cdots \,\&\, x_{n-1} \neq x_n)$

Hay como mucho _____ F.

Una de las formas de decir 'como mucho n cosas son F' es poner un signo de negación delante de una de las simbolizaciones anteriores y decir $\neg$'al menos $n+1$ cosas son F'. De manera equivalente:

uno $\forall x_1\forall x_2\big[(Fx_1 \,\&\, Fx_2) \rightarrow x_1 = x_2\big]$

dos $\forall x_1\forall x_2\forall x_3\big[(Fx_1 \,\&\, Fx_2 \,\&\, Fx_3) \rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)\big]$

tres $\forall x_1\forall x_2\forall x_3\forall x_4\big[(Fx_1 \,\&\, Fx_2 \,\&\, Fx_3 \,\&\, Fx_4) \rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_1 = x_4 \vee x_2 = x_3 \vee x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4)\big]$

n $\forall x_1 \cdots \forall x_{n+1}\big[(Fx_1 \,\&\, \cdots \,\&\, Fx_{n+1}) \rightarrow (x_1 = x_2 \vee \cdots \vee x_n = x_{n+1})\big]$

Hay exactamente _____ F.

Una manera de decir 'exactamente n cosas son F' es unir dos de las simbolizaciones anteriores y decir 'al menos n cosas son F' & 'como mucho n cosas son F'. Las siguientes fórmulas equivalentes son más cortas:

cero $\forall x\neg Fx$

uno $\exists x\big[Fx \,\&\, \neg\exists y(Fy \,\&\, x \neq y)\big]$

dos $\exists x_1\exists x_2\big[Fx_1 \,\&\, Fx_2 \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, \neg\exists y\big(Fy \,\&\, y \neq x_1 \,\&\, y \neq x_2\big)\big]$

tres $\exists x_1\exists x_2\exists x_3\big[Fx_1 \,\&\, Fx_2 \,\&\, Fx_3 \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, x_1 \neq x_3 \,\&\, x_2 \neq x_3 \,\&\, \neg\exists y(Fy \,\&\, y \neq x_1 \,\&\, y \neq x_2 \,\&\, y \neq x_3)\big]$

n $\exists x_1 \cdots \exists x_n\big[Fx_1 \,\&\, \cdots \,\&\, Fx_n \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, \cdots \,\&\, x_{n-1} \neq x_n \,\&\, \neg\exists y(Fy \,\&\, y \neq x_1 \,\&\, \cdots \,\&\, y \neq x_n)\big]$

Especificar el tamaño del UD

Al eliminar F de las simbolizaciones anteriores se producen enunciados que hablan del tamaño del UD. Por ejemplo, 'hay al menos 2 cosas (en el UD)' puede simbolizarse como $\exists x \exists y(x \neq y)$.

Reglas de Demostración Básicas

Reiteración

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A} & \text{R } m
\end{array}$$

Introducción de la Conjunción

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} & \\
n & \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} & \&\text{I } m, n
\end{array}$$

Eliminación de la Conjunción

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \&\text{E } m \\
 & \mathcal{B} & \&\text{E } m
\end{array}$$

Introducción de la Disyunción

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \vee\text{I } m \\
 & \mathcal{B} \vee \mathcal{A} & \vee\text{I } m
\end{array}$$

Eliminación de la Disyunción

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\
n & \neg\mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \vee\text{E } m, n
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\
n & \neg\mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \vee\text{E } m, n
\end{array}$$

Introducción del Condicional

$$\begin{array}{r|l|ll}
m & & \underline{\mathcal{A}} & \text{busco } \mathcal{B} \\
n & & \mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \to \mathcal{B}} & \to\text{I } m\text{–}n
\end{array}$$

Eliminación del Condicional

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \to\text{E } m, n
\end{array}$$

Introducción del Bicondicional

$$\begin{array}{r|l|ll}
m & & \underline{\mathcal{A}} & \text{busco } \mathcal{B} \\
n & & \mathcal{B} & \\
p & & \underline{\mathcal{B}} & \text{busco } \mathcal{A} \\
q & & \mathcal{A} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}} & \leftrightarrow\text{I } m\text{–}n,\ p\text{–}q
\end{array}$$

Eliminación del Bicondicional

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \leftrightarrow\text{E } m, n
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \leftrightarrow\text{E } m, n
\end{array}$$

Introducción de la Negación

$$\begin{array}{r|l|ll}
m & & \underline{\mathcal{A}} & \text{por reductio} \\
n-1 & & \mathcal{B} & \\
n & & \neg\mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathcal{A}} & \neg\text{I } m\text{–}n
\end{array}$$

Eliminación de la Negación

$$\begin{array}{r|l|ll}
m & & \underline{\neg\mathcal{A}} & \text{por reductio} \\
n-1 & & \mathcal{B} & \\
n & & \neg\mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A}} & \neg\text{E } m\text{–}n
\end{array}$$

Reglas de los Cuantificadores

Introducción del Existencial

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ & \exists x\mathcal{A}\,\boxed{\boxed{c^*\Rightarrow x}} & \exists\text{I } m \end{array}$$

* x puede sustituir a alguna o a todas las ocurrencias de c en $\mathcal{A}$.

Eliminación del Existencial

$$\begin{array}{r|ll} m & \exists x\mathcal{A} & \\ n & \quad\begin{array}{|l} \mathcal{A}\,\boxed{x\Rightarrow c^*} \\ \hline \end{array} & \\ p & \quad\begin{array}{|l} \mathcal{B} \end{array} & \\ & \mathcal{B} & \exists\text{E } m,\ n\text{–}p \end{array}$$

* c no debe aparecer fuera de la subdemostración.

Introducción del Universal

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ & \forall x\mathcal{A}\,\boxed{c\Rightarrow x} & \forall\text{I } m \end{array}$$

c no debe ocurrir en ninguna asunción no descargada.

Eliminación del Universal

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall x\mathcal{A} & \\ & \mathcal{A}\,\boxed{x\Rightarrow c} & \forall\text{E } m \end{array}$$

Reglas de la Identidad

$$\begin{array}{r|ll} & c = c & =\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & c = d & \\ n & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{A}\,\boxed{\boxed{c\Rightarrow d}} & =\text{E } m,\ n \\ & \mathcal{A}\,\boxed{\boxed{d\Rightarrow c}} & =\text{E } m,\ n \end{array}$$

Una constante puede sustituir a alguna o a todas las ocurrencias de la otra.

Reglas Derivadas

Dilema

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A}\vee\mathcal{B} & \\ n & \mathcal{A}\to\mathcal{C} & \\ p & \mathcal{B}\to\mathcal{C} & \\ & \mathcal{C} & \text{DIL } m,\ n,\ p \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A}\to\mathcal{B} & \\ n & \neg\mathcal{B} & \\ & \neg\mathcal{A} & \text{MT } m,\ n \end{array}$$

Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A}\to\mathcal{B} & \\ n & \mathcal{B}\to\mathcal{C} & \\ & \mathcal{A}\to\mathcal{C} & \text{SH } m,\ n \end{array}$$

Reglas de Sustitución

Conmutatividad (Con)

$$(\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B}) \iff (\mathcal{B}\,\&\,\mathcal{A})$$
$$(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \iff (\mathcal{B}\vee\mathcal{A})$$
$$(\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B}) \iff (\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{A})$$

De Morgan (DeM)

$$\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A}\,\&\,\neg\mathcal{B})$$
$$\neg(\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{B})$$

Doble Negación (DN)

$$\neg\neg\mathcal{A} \iff \mathcal{A}$$

Condicional Material (CM)

$$(\mathcal{A}\to\mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A}\to\mathcal{B})$$

Cambio del Bicondicional ($\leftrightarrow$c)

$$[(\mathcal{A}\to\mathcal{B})\,\&\,(\mathcal{B}\to\mathcal{A})] \iff (\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B})$$

Negación del Cuantificador (NC)

$$\neg\forall x\mathcal{A} \iff \exists x\neg\mathcal{A}$$
$$\neg\exists x\mathcal{A} \iff \forall x\neg\mathcal{A}$$

En la introducción de su volumen *Lógica Simbólica*, Charles Lutwidge Dodson aconsejaba: "Cuando llegues a algún pasaje que no entiendas, *léelo otra vez*; si *aun así* no lo entiendes, *léelo otra vez*; si no lo consigues, incluso después de *tres* lecturas, es muy probable que tu cerebro esté cansándose un poco. En tal caso, deja el libro y realiza otras actividades, y el siguiente día, cuando vuelvas a él fresco, probablemente descubrirás que es *bastante* fácil."

Lo mismo puede decirse de este volumen, aunque los lectores están perdonados si se toman un descanso para picar algo después de *dos* lecturas.

sobre el autor:

P.D. Magnus es profesor asociado de filosofía en Albany, Nueva York. Su principal campo de investigación es la filosofía de la ciencia.

sobre el traductor:

José Ángel Gascón es estudiante del Doctorado en Filosofía en la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) en Madrid, España. Disfruta de una beca de personal investigador en formación de la UNED. Su principal campo de investigación es la teoría de la argumentación.